

Ortak ve Özel Bilginin Gönderildiği Çok Kullanıcılı Aşağı Bağlantılı MIMO Haberleşme Sistemlerinde Düşük Karmaşıklıkla Bir Ön Kodlayıcı ve Kod Çözücü Tasarımı

A Low-Complexity Precoder-Decoder Design in Multiuser Downlink MIMO Communication Systems For Common and Private Information Transmission

Umay Ezgi Deniz
Radar ve Elektronik Harp Sistemleri
ASELSAN
Ankara, Türkiye
uedeniz@aselsan.com.tr

Çağatay Candan
Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Ankara, Türkiye
ccandan@metu.edu.tr

Özetçe —Bu bildiri, kullanıcılara ortak ve özel bilginin birlikte gönderildiği çok kullanıcı aşağı bağlantılı çok girdili çok çıktılı (MIMO) haberleşme sistemlerinde en büyük-en küçük eşitliği probleminde ön kodlayıcı ve kod çözücü tasarımı için kullanılan yarı tanımlı rahatlatma işlemine dayalı yöntemler yerine alternatif bir metod önerilmiştir. Önerilen bu yöntem toplam sinyal-enterferans ve gürültü oranı (SINR) maksimizasyonu ve toplam ortalama karesel hata en küçükleme problemlerini çözen iki yöntemin bir kombinasyonu olup (Hybrid yöntemi) zamansal açıdan yarı tanımlı programlama araçlarını kullanan algoritmalarından oldukça avantajlıdır. Önerilen yöntemin ortalama bit hata oranı performansı ve hesaplama zamanı diğer algoritmalarla karşılaştırılmalı olarak benzetim sonuçlarında verilmiştir.

Anahtar Kelimeler—ön kodlayıcı-kod çözücü tasarımı, çok kullanıcı, en büyük-en küçük eşitliği, ortak ve özel bilginin gönderimi

Abstract—In this paper, an alternative method is proposed instead of the ones using semi-definite programming (SDP) tools in precoder and decoder design to solve max-min fairness (MMF) problem in the multiuser downlink multi-input-multi-output (MIMO) communication systems for common and private information transmission. This is a Hybrid method which is the combination of the two solving total signal-interference plus noise ratio (SINR) maximization (Total-SINR Max) and total MMSE (Joint-TMSE) problems and it is very advantageous than algorithms using SDP. The performance of Hybrid method in terms of the average bit error ratio (BER) and computation time is given in the simulation results.

Keywords—precoder-decoder design, multiuser, max-min fairness, common and private information transmission.

I. GİRİŞ

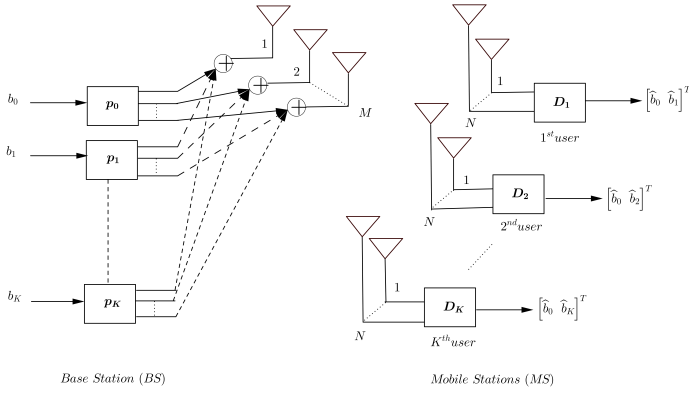
Anten teknolojilerinin her geçen gün hızla gelişmesiyle kablosuz haberleşme sistemlerinde MIMO yöntemlerinin kullanılması da oldukça yaygın bir hale gelmiştir [1]. MIMO sistemlerdeki ön kodlayıcı ve kod çözücü bloklar sayesinde gönderici tarafından birden çok bilgi aynı anda, aynı frekansta ve aynı kod bilgisiyle birden fazla kullanıcının bulunduğu bir sistemde gönderilebilmektedir.

Literatürde tüm kullanıcılara sadece özel bilginin gönderildiği senaryoda en küçük-en büyük eşitliği probleminde ön kodlayıcı ve kod çözücü tasarımıyla ilgili pek çok yöntem bulunmaktadır. [2]'de MMF probleminde denk olan servis hizmeti (QoS) problemi kuadratik kısıtlı dört evreli bir problem (QCQP) olduğundan yarı tanımlı programlama (SDP) araçları kullanılarak çözülebilmektedir [3]. Bulunan çözüm üzerinden ön kodlayıcı tasarımı [4]'de verilen yarı tanımlı rahatlatma (SDR) yöntemi (SDR-randA) veya [5]'deki deterministik yaklaşımla (SDR-detA) bulunmaktadır. Öte yandan, [6]'da tam ceza yöntemini (EPA) kullanarak bir ön kodlayıcı tasarımı yapılmaktadır. Aynı şekilde bu yöntem de SDP araçlarını kullanarak çözüm sunmaktadır. SDP kullanan yöntemler herkese özel bilginin gönderildiği senaryo altında optimum çözümü bulmaktadır [7], ancak hesaplama zamanları oldukça uzun sürmektedir. Bu durum da gerçek zamanlı uygulamalar için problem olmaktadır.

Bu çalışmadaki temel amaç çok kullanıcı, kullanıcılara ortak ve özel bilginin aynı anda gönderildiği bir senaryoda MMF problemini çözmek amacıyla ön kodlayıcı ve kod çözücü bloklarını SDP araçları kullanmadan tasarlamaya çalışmaktır. SDP kullanan yöntemlerin bu senaryo için uyarlanması kolayca yapılabilmektedir [5].

II. SİSTEM MODELİ VE LİTERATÜRDEKİ YÖNTEMLER

Bu çalışmada çok kullanıcılı aşağı bağlantılı bir MIMO sisteminde K adet kullanıcıya gönderici tarafından ortak bilginin ve tüm kullanıcılara özgü bilgilerin aynı anda M adet anten yardımıyla gönderildiği varsayılmaktadır. b_0 ve b_i sırasıyla ortak ve i . kullanıcıya gelen özel bilgiyi temsil eden semboller olup sıfır ortalamalı ve birim varyanslı bağımsız eş Gauss dağılımlıdır. Semboller Rayleigh dağılımlı olduğu varsayılan ve i . kullanıcı için \mathbf{H}_i ile gösterilen kanaldan geçmeden önce gönderici tarafından $M \times (K + 1)$ boyutlu $\mathbf{P} = [p_0 p_1 \dots p_K]$ ön kodlayıcı bloğundan geçmektedir. Alıcı tarafında kullanıcıların eşit sayıda antene (N adet) sahip oldukları düşünülmektedir. i . kullanıcı $2 \times N$ boyutlu kod çözücü \mathbf{D}_i matrisinden gelen sinyali geçirerek ortak bilgi ve kendi özel bilgisini almaya çalışmaktadır. i . alıcı istasyonunda sıfır ortalamalı N_0 gücünde Gauss dağılımlı \mathbf{n}_i ile gösterilen gürültü vektörü olduğu bulunduğu ve gönderici tarafındaki toplam güç değerinin P_{tot} olduğu varsayılmıştır. Şekil 1'deki



Şekil 1: Ortak ve Özel Bilginin Gönderildiği Sistem Modeli

sistem modeli baz alındığında i numaralı kullanıcının tahmin ettiği ortak ve özel bilgi $\mathbf{r}_i = [\hat{b}_0 \ \hat{b}_i]^T$ olarak ifade edilirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathbf{r}_i = [\hat{b}_0 \ \hat{b}_i]^T = \mathbf{D}_i \mathbf{H}_i \mathbf{P} \mathbf{b} + \mathbf{D}_i \mathbf{n}_i \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (1)$$

$$\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_k]^T.$$

Burada i numaralı kullanıcı için ortak ve özel SINR olmak üzere iki adet tanımlama yapılmıştır. Alıcı tarafında i . kullanıcıda tahmin edilen ortak ve özel bilgiler sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= \underbrace{(\mathbf{D}_i)_1 \mathbf{H}_i p_0 b_0}_{\text{ortak sinyal terimi}} + \underbrace{\sum_{k=1}^K (\mathbf{D}_i)_1 \mathbf{H}_i p_k b_k}_{\text{enterferans terimi}} + \underbrace{(\mathbf{D}_i)_1 \mathbf{n}_i}_{\text{gürültü terimi}}, \\ \hat{b}_i &= \underbrace{(\mathbf{D}_i)_2 \mathbf{H}_i p_i b_i}_{\text{özel sinyal terimi}} + \underbrace{\sum_{k=0, k \neq i}^K (\mathbf{D}_i)_2 \mathbf{H}_i p_k b_k}_{\text{enterferans terimi}} + \underbrace{(\mathbf{D}_i)_2 \mathbf{n}_i}_{\text{gürültü terimi}}. \end{aligned} \quad (2)$$

i . kullanıcıya ait ortak ve özel bilgiler için ön kodlayıcı vektörleri birim norm olacak şekilde düşünüldüğünde ve bu

vektörler sırasıyla \mathbf{u}_0 ve \mathbf{u}_i olarak temsil edildiğinde, i . kullanıcıya ait ortak ve özel SINR ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \text{SINR}_{com}^i &= \frac{p_0 |(\mathbf{D}_i)_1 \mathbf{H}_i \mathbf{u}_0|^2}{\sum_{i=1}^K |(\mathbf{D}_i)_1 \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i|^2 + N_0 |(\mathbf{D}_i)_1|^2} \\ \text{SINR}_{pri}^i &= \frac{p_i |(\mathbf{D}_i)_2 \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i|^2}{\sum_{i=1}^K |(\mathbf{D}_i)_2 \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i|^2 + N_0 |(\mathbf{D}_i)_2|^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Buradaki optimizasyon probleminde Denklem 3'te verildiği üzere toplamda $2K$ adet SINR ifadesi içinde en küçük olanı ön kodlayıcı ve kod çözücü tasarımı yapılarak en çoklanmaya çalışılmaktadır. Problem matematiksel olarak Denklem 4'teki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_K \in \mathbb{C}^M, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_K \in \mathbb{C}^{2 \times N}} \quad & \min_{1 \leq i \leq 2K} \text{SINR}_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=0}^K \text{tr}(\mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^H) = P_{tot}. \end{aligned} \quad (4)$$

Bu problemdeki ön kodlayıcı tasarımı literatürde her bir kullanıcıya sadece özel bilgilerin gönderildiği senaryo altında verilmiştir [2]. Problem SDP araçları yardımıyla çözülebilir olup bulunan sonuç üzerinden SDR yöntemiyle ön kodlayıcı tasarımı tamamlanmıştır [4]. Denklem 4 incelendiğinde aynı çözüm yönteminin ortak ve özel bilginin gönderildiği senaryo için de uyarlanabilir olduğu görülmüştür [5]. Bu tür bir programlama aracı ile yapılan optimizasyon ortalama bit hatası oranı açısından başarılı sonuçlar vermektedir ancak hesaplama süreleri oldukça uzun olmaktadır. Bu nedenle gerçek zamanlı implementasyon açısından uygun değildir. Bu çalışmada SDP araçları kullanılmadan optimizasyon problemini çözmek amacıyla alternatif bir yöntem (Hybrid metodu) önerilmiştir.

III. ÖNERİLEN ÇÖZÜM

MMF probleminin çözümü ortak bilginin varlığından dolayı zordur. Önerilen Hybrid yönteminde çözümü kolaylaştırmak amacıyla MMF probleminin yerine Denklem 5'te verilen toplam SINR'ın en çoklanması problemi çözülmektedir.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_K \in \mathbb{C}^M, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_K \in \mathbb{C}^{2 \times N}} \quad & \sum_{i=1}^{2K} \text{SINR}_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^K \text{tr}(\mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^H) = P_{tot}. \end{aligned} \quad (5)$$

Önerilen yöntemde ön kodlayıcı ve kod çözücü tasarımı yinelemeli bir şekilde yapılacak olup her adımda bulunan sonuçlar üzerinden kullanıcılar arasında toplam gönderilen güç değeri dağıtılacaktır.

A. Kod Çözücü Tasarımı

Denklem 3'teki ifade açık olarak yazıldığında verilen bir önkodlayıcı için her bir kullanıcının kod çözücü tasarımı diğer kullanıcılardan bağımsız olarak yapabildiği görülmektedir. Bu durumda i . kullanıcının optimum kod çözücü bloğunun 1. ve 2. satırları sırasıyla \mathbf{U}_1 ile \mathbf{U}_2 'nin ve \mathbf{U}_3 ile \mathbf{U}_4 'ün

genelleştirilmiş esas özvektörüne eşit olmaktadır. U_1 , U_2 , U_3 ve U_4 , ün açıklamaları Denklem 6'da verilmiştir.

$$U_1 = \mathbf{H}_i \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^H \mathbf{H}_i^H, \quad U_2 = \mathbf{H}_i \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H \mathbf{H}_i^H + N_0 \mathbf{I}.$$

$$U_3 = \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{H}_i^H, \quad U_4 = \mathbf{H}_i \sum_{k=0, k \neq i}^K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H \mathbf{H}_i^H + N_0 \mathbf{I}.$$
(6)

B. Ön Kodlayıcı Tasarımı

Ön kodlayıcı bloğunun tasarımında ön kodlayıcı vektörleri birim norm olarak düşünülmektedir. Verilen bir kod çözücü kümesi için, Denklem 5'te verilen maliyet fonksiyonu incelendiğinde toplam SINR ifadesi paydadaki enterferans teriminden dolayı ön kodlayıcı vektörlerin kuadratik bir fonksiyonu olmakta ve bu durum problemin çözümünü oldukça zorlaştırmaktadır. Bu nedenle her bir SINR ifadesindeki enterferans terimleri önemsenmeden ön kodlayıcı optimizasyonu yapılmaya çalışılmıştır. Son durumda total SINR ifadesi Denklem 7'de verildiği gibi olur.

$$\sum_{i=1}^{2K} \text{SINR} = \mathbf{u}_0^H \sum_{i=1}^K \frac{\mathbf{B}_i}{N_0 \text{tr} \left((\mathbf{D}_i)_1 (\mathbf{D}_i)_1^H \right)} \mathbf{u}_0$$

$$+ \sum_{i=1}^K \mathbf{u}_i^H \frac{\mathbf{A}_i}{N_0 \text{tr} \left((\mathbf{D}_i)_2 (\mathbf{D}_i)_2^H \right)} \mathbf{u}_i.$$
(7)

Burada $\mathbf{A}_i = \mathbf{H}_i^H (\mathbf{D}_i)_2^H (\mathbf{D}_i)_2 \mathbf{H}_i$ ve $\mathbf{B}_i = \mathbf{H}_i^H (\mathbf{D}_i)_1^H (\mathbf{D}_i)_1 \mathbf{H}_i$ olarak tanımlanmıştır. Denklem 7'den görüldüğü üzere ortak bilgi ön kodlayıcı vektörü \mathbf{u}_0 ile her bir özel bilgiye ait ön kodlayıcı vektörünün \mathbf{u}_i optimizasyonu birbirinden bağımsız olarak yapılabilir. Bu durumda

\mathbf{u}_0 ve \mathbf{u}_i vektörleri sırasıyla $\sum_{i=1}^K \frac{\mathbf{B}_i}{N_0 \text{tr} \left((\mathbf{D}_i)_1 (\mathbf{D}_i)_1^H \right)}$ ve $\frac{\mathbf{A}_i}{N_0 \text{tr} \left((\mathbf{D}_i)_2 (\mathbf{D}_i)_2^H \right)}$ ifadelerinin genelleştirilmiş esas özvektörlerine eşit olarak seçilmelidir.

C. Gönderilen Gücün Dağıtımı

Tüm kullanıcılarda ortak bilginin var olmasından dolayı gönderici tarafındaki gücün kullanıcıların kanalları için dağıtımı zor bir problemdir. Bu nedenle, bu çalışmada kısmi bir optimizasyon yaklaşımı olarak ortak ön kodlayıcı vektörü olan \mathbf{p}_0 için toplam gönderici gücünün yarısı olacak şekilde bir güç değeri atanmıştır. Kalan $P_{\text{tot}}/2$ güç değeri ise tüm özel SINR'lar sabit bir c değerine eşit olacak şekilde ön kodlayıcılara dağıtılmıştır. Bu durumda özel bilgilere ait ön kodlayıcıların güç dağılımı Denklem 8'de verildiği gibi çözülebilir.

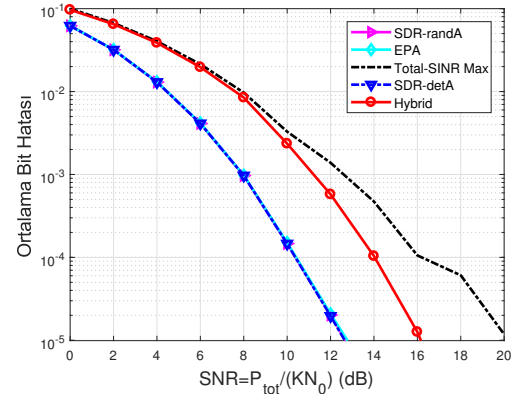
$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{X}_k & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P_{\text{tot}}/2 \end{bmatrix}$$
(8)

Total-SINR Max yöntemi SDP araçlarını kullanmadan bir tasarım yaptığı için hesaplama zamanı bu araçları kullanan algoritmalara göre oldukça kısadır. Ancak bu yöntemde yüzdesel olarak çok düşük sayıda kanal için kötü en küçük SINR değerleri elde edilebilmektedir. Bu tip durumların sayısının çok az olmasına rağmen bu tip durumlardan ortalama bit hatası değeri oldukça fazla şekilde etkilenmektedir. Bu nedenle Total-SINR Max algoritmasından elde edilen en küçük SINR değeri belirli bir eşığın altında ise bu yöntemin yerine Joint-TMSE yöntemi kullanılmıştır [5], [8]. Bu iki yöntemin bir kombinasyonu olan Hybrid algoritması sayesinde ortalama bit hatasında büyük ölçüde iyileşme gözlemlenmiş ve detaylı analiz benzetim sonuçlarında verilmiştir.

IV. BENZETİM SONUÇLARI

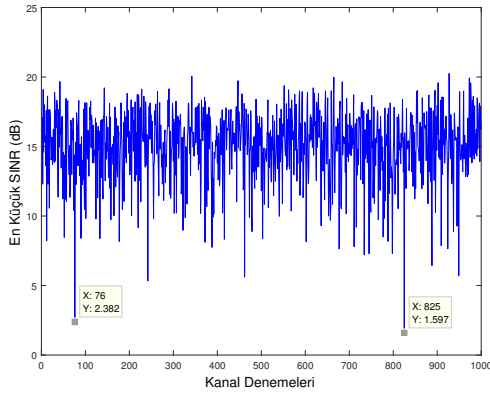
Bu bölümde ön kodlayıcı ve kod çözücü tasarımında kullanılan algoritmaların performansları sinyal-gürültü oranına (SNR) bağlı olarak ortalama bit hatası değeri cinsinden karşılaştırılmıştır. Benzetimlerde tanımlanan SNR değeri kullanıcı sayısı ile normalize edilmiştir. Ek olarak, gerçek zamanlı uygulanabilirliği anlamak amacıyla algoritmaların hesaplama süreleri arasındaki karşılaştırmaya da yer verilmiştir. Benzetimler sırasında kanalın tamamen bilindiği varsayılmış olup gönderilen sembollerin modülasyonu BPSK'dir. Sonuçlar 1000 adet Monte Carlo benzetiminin ortalaması alınarak oluşturulmuştur. SDP yönteminde kullanılan çözücü SeDuMi'dir. Tüm yöntemlerde ön kodlayıcı ve kod çözücü tasarımının algoritma belirli bir yere yakınsayana veya iterasyon sayısı belirli bir sayıya ulaşana kadar yinelemeli bir şekilde yapıldığı düşünülmüştür. Benzetimler boyunca göndericideki anten sayısı $M = 6$, her bir alıcısındaki anten sayısı $N = 2$ ve kullanıcı sayısı $K = 3$ olarak seçilmiştir.

Şekil 2'de görüldüğü üzere ortalama bit hatası değeri

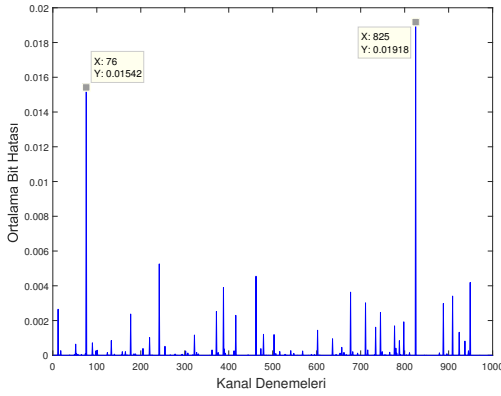


Şekil 2: Ortalama Bit Hatası - SNR, $M = 6$, $K = 3$, $N = 2$.

performansı SDR-randA, SDR-detA ve EPA gibi SeDuMi temelli algoritmalarda birbirine çok yakın olup Total SINR Max ve Hybrid algoritmalarından daha iyidir, çünkü incelenen senaryoda SDP işlemi sonucu bulunan çözümler optimum olmaktadır [5]. Şekil 3 ve Şekil 4 beraber incelendiğinde yapılan 1000 farklı Monte Carlo simülasyonu içerisinde 76. ve 825. kanal denemelerinde Total-SINR Max algoritması tarafından düşük en küçük SINR değerleri bulunmuş olup aynı kanal denemeleri için bit hatası değerleri de yüksek hesaplanmıştır. Seçilen bu sistem parametreleri için Joint-TMSE algoritmasının kullanılacağı en küçük SINR eşik değeri



Şekil 3: En Küçük SINR - Kanal Denemeleri, $M = 6$, $K = 3$, $N = 2$.



Şekil 4: Ortalama Bit Hatası - Kanal Denemeleri $M = 6$, $K = 3$, $N = 2$.

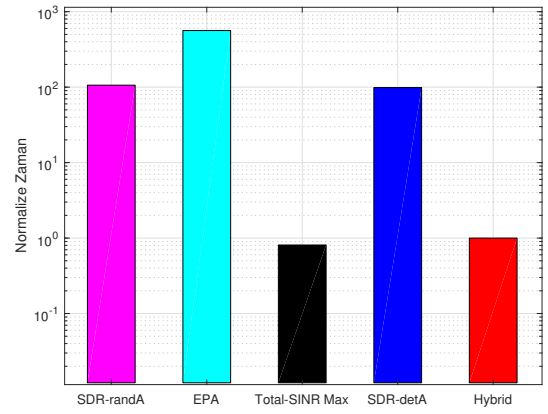
7 dB olarak belirlenmiştir. Yaklaşık 1000 deneme için oldukça az sayıda 7 dB'nin altında en küçük SINR sonucu elde edilmesine rağmen bu kanallardan dolayı ortalama bit hatası değeri oldukça yüksek hesaplanmıştır. Eşik değerinin altında görülen en küçük SINR değerleri için Joint-TMSE algoritması çalıştırıldığında sonuçların iyileştiği gözlemlenmektedir. 10^{-5} ortalama bit hatası için Hybrid yöntemiyle yaklaşık 4 dB iyileşme sağlanmıştır.

Algoritmaların çalışma zamanları Hybrid algoritmasına göre

TABLO I: Hybrid Metodunda Joint-TMSE Metodunun Çalışma Yüzdesi

M	K	N	$SINR$ (dB)	Joint-TMSE Çalışma Yüzdesi
6	3	2	0	3.4
6	3	2	4	1.9
6	3	2	8	2.4
6	3	2	12	3.5
6	3	2	16	2.8
6	3	2	20	2.5

normalize edilmiş değerleri içeren Şekil 5 baz alınarak kıyaslandığında SeDuMi kullanan algoritmalara göre Total-SINR Max ve Hybrid algoritmalarında yaklaşık 100 kat bir hızlanma sağlanmıştır. Ayrıca Tablo I'den görüldüğü gibi Hybrid algoritmasında Joint-TMSE algoritmasının çalışma yüzdesi oldukça düşüktür. Diğer bir deyişle, Hybrid algoritmasıyla zamansal anlamda çok az bir kayıpla ortalama bit hatası performansında



Şekil 5: Algoritma Normalize Hesaplama Zamanları $M = 6$, $K = 3$, $N = 2$.

oldukça yüksek bir artış görülmüştür. Gerçek zamanlı implementasyon açısından SDP araçlarına dayanan yöntemlerin oldukça dezavantajlı olduğu açıkça görülmektedir.

V. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada ortak ve özel bilginin aynı anda kullanıcılara gönderildiği bir senaryo altında ön kodlayıcı ve kod çözücü tasarımında SDP yöntemlerine alternatif olabilecek Hybrid yöntemi önerilmiştir. SDR-randA, SDR-detA ve EPA gibi SDP araçlarını kullanan yöntemler ortalama bit hatası açısından optimum performansa sahiptir ancak hesaplama zamanları çok yüksek olduğundan pratik hayattaki kullanımları problem olabilmektedir. Optimum metotlara göre 10^{-5} ortalama bit hatası değeri için yaklaşık 4 dB kötü olan Hybrid yöntemiyle zamansal olarak yaklaşık 100 kat iyileşme sağlanmıştır. SDP yöntemlerini kullanmamasından dolayı gerçek sistemlerdeki işleyiş açısından önerilen metodun uygun olduğu değerlendirilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," *Wireless Personal Commun.*, vol. 6, no. 3, pp. 311–335, Mar. 1998.
- [2] E. Karipidis, N. D. Sidiropoulos and Z. Q. Luo, "Quality of Service and Max-Min Fair Transmit Beamforming to Multiple Cochannel Multicast Groups," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 3, pp. 1268–1279, March 2008.
- [3] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization Methods Software*, vol. 11–12, pp. 625–653, Aug. 1999. [Online]. Available: <http://sedumi.mcmaster.ca>
- [4] N. D. Sidiropoulos, T. N. Davidson and Zhi-Quan Luo, "Transmit beamforming for physical-layer multicasting," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 6, pp. 2239–2251, June 2006.
- [5] U. E. Deniz, "Joint precoder and decoder design in multiuser downlink MIMO communications for common, private and common-private information transmission," M.S. thesis, Middle East Tech. Univ., Department of Electrical and Electronics Engineering, Ankara, Turkey, 2017.
- [6] Bertsekas, D. P., "Necessary and sufficient conditions for a penalty method to be exact," *Mathematical programming*, vol. 9, no. 1, pp. 87–99, 1975.
- [7] Y. Huang and D. P. Palomar, Rank-Constrained Separable Semidefinite Programming with Applications to Optimal Beamforming," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 2, pp. 664–678, 2010
- [8] Lai-U Choi and R. D. Murch, "A transmit preprocessing technique for multiuser MIMO systems using a decomposition approach," in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 3, no. 1, pp. 20–24, Jan. 2004.