

# Varış Zaman Farkı Ölçümleri ile Kaynak Konumlandırılmada En Küçük Kareler Temelli Yöntemlerin İncelenmesi

## An Investigation of Least Squares Based Methods for Source Localization from Time Difference of Arrival Measurements

Nusret ÇELENK

Sayısal ve Gömülü Sistemler  
Elektronik Tasarım Müdürlüğü  
ASELSAN A.Ş.  
Ankara, Türkiye  
ncelenk@aselsan.com.tr

Çağatay CANDAN

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Ankara, Türkiye  
ccandan@metu.edu.tr

**Özetçe** —Bu bildiriye, varış zaman farkı (VZF) ölçümleri ile kaynak konumlandırılmada en küçük kareler temelli yöntemler incelenmiştir. Ayrıca, literatürdeki bir yöntemin ağırlıklı en küçük kareler temelli bir türevi önerilmiştir. Önerilen yöntem ile literatürde hâlihazırda bulunan yöntemler, başarımları seviyeleri yönünden çeşitli algılayıcı ve kaynak yerleşim senaryoları altında ve farklı gürültü seviyelerinde karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler**—VZF, kaynak konumlandırma.

**Abstract**—The least squares based methods for source localization from time difference of arrival (TDOA) measurements are investigated. Also, the weighted least squares based version of an existing method is proposed. The proposed method and the existing ones in the literature are compared in terms of the performance under several source and sensors position scenarios and different noise levels.

**Keywords**—TDOA, source localization.

### I. GİRİŞ

Pasif algılayıcılar yardımıyla yayın yapan bir kaynağın konumunun kestirimine radar, sonar, kablosuz haberleşme, navigasyon, jeofizik, arama-kurtarma, telekonferans gibi birçok alanda ihtiyaç duyulmaktadır [1], [2]. Literatürde, kaynaktan yayılan işaretlerin frekans değişimi, doğrultusu, zamanı ve gücü gibi nicelikleri yardımıyla konumlandırma yapan teknikler mevcuttur. Bu tekniklerden biri olan ve yaygın olarak kullanılan [3] varış zaman farkı (VZF) temelli konum kestiriminde; kaynaktan yayılan işaretlerin, konumları bilinen durağan algılayıcılara geliş zamanları arasındaki farklar kullanılmaktadır. Bu yöntemde, algılayıcıların eşzamanlı olması gerekirken, kaynak-algılayıcı eşzamanlamasına ihtiyaç duyulmamaktadır.

VZF temelli konumlandırma yöntemi, temelde iki adımdan oluşmaktadır. İlk adım, algılayıcı verilerini kullanarak referans seçilen bir algılayıcıya göre diğerlerinin VZF değerlerini kestirmek; ikinci adım ise bu değerleri kullanarak kaynağın konumunu tahmin etmektir. Bu çalışmada; ilk adımın gerçekleştirildiği kabul edilmiş, ikinci adım üzerinde durulmuştur.

Bir algılayıcı çiftinden elde edilen VZF değeri, kaynak konumunun doğrusal olmayan bir fonksiyonudur ve 2 (3) boyutlu uzayda bir hiperbolü (hiperboloidi) tanımlamaktadır. Ölçüm ve eşzamanlama hatalarının olmadığı bir durumda, kaynak konumu bu hiperbollerin (hiperboloidlerin) kesişim noktasıdır. Bahsi geçen problem için maksimum olabilirlik (MO) yöntemi formüle edildiğinde, doğrusal olmayan bir eniyileme problemiyle karşılaşmaktadır. Bu da sonuca ulaşabilmek için yinelemeli yöntemlerin kullanılmasını gerekli kılmaktadır. Ancak yinelemeli yöntemler; yerel minimumlardan kaçınmak için iyi bir başlangıç tahminine ihtiyaç duyulması, ıraksama ihtimali, görece yüksek hesaplama karmaşıklığına sahip olunması gibi olumsuz yönlerle sahiptir.

Diğer bir yaklaşım, doğrusal olmayan en küçük kareler (EKK) yöntemini kullanmak ve Taylor serisi açılımı yardımıyla doğrusallaştırma yaparak sonuca ulaşmaktır [4]. Benzer şekilde, bu yöntemde de yinelemeli bir çözümün kullanılması gerekmektedir.

[5]'te; VZF değerlerinden elde edilen hiperbol denklemlerinin kareleri alınmış, ardından kaynak konumuna bağlı yardımcı bir değişken eklenmiş ve bu değişken bağımsız varsayılarak denklem seti doğrusal hale getirilmiştir. Sonrasındaysa doğrusal EKK yöntemiyle konum kestirimi elde edilmiştir. Bildirinin devamında bu kestirim metodu kısaca EKK yöntemi olarak anılacaktır. Kapalı formdaki bu yöntem; hem gerçek zamanlı ve düşük hesaplama kapasitesine sahip sistemler için, hem de yukarıda bahsi geçen yinelemeli yöntemlerde ihtiyaç

duyulan başlangıç tahminini elde etmek için oldukça uygundur. Literatürde, küresel aradeğerleme ve altuzay enküçültme adlarıyla önerilen kapalı formdaki diğer iki yöntemin EKK yöntemi ile eşdeğer olduğu, hesaplama karmaşıklığı seviyelerinin ise EKK'den daha yüksek olduğu gösterilmiştir [6].

EKK yönteminde denklem setine eklenen yardımcı değişken ile kaynak konumu arasındaki ilişkiyi kullanarak kestirimi iyileştirmeyi amaçlayan yaygın iki yaklaşım mevcuttur [3]. Bunlardan biri bahsi geçen ilişkiyi ikinci bir EKK ile sonuca uygulamak [7], diğeryse enküçültme problemine bir kısıt olarak dahil etmektedir [8]. Yakınlarda; ikinci yaklaşım geliştirilerek elde edilen, algılayıcı konumlarının problemi kötü koşullu hale getirmesine daha dayanıklı yöntemler öne sürülmüştür [2], [3]. Ancak bu yöntemler hesaplama karmaşıklığını artırmaktadır.

Bu çalışmada, VZF ile konum kestirimi için literatürde önerilmiş EKK temelli iki yöntem incelenmiş, bu yöntemlerden birinin ağırlıklı EKK (AEKK) temelli bir türevi önerilmiştir. Önerilen yöntem ile incelenen yöntemler, başarımları seviyeleri yönünden karşılaştırılmıştır.

*Notasyon:*  $\|a\|$  ve  $a_i$ , herhangi bir  $a$  vektörünün sırasıyla Öklid normu ve  $i$ 'nci elemanını göstermek için kullanılmıştır.  $\odot$  sembolü Hadamard çarpımını ifade etmektedir. Gürültü içeren  $(*)$ 'in gürültüsüz değeri  $(*)^0$  ile gösterilmektedir.

## II. PROBLEM TANIMI

$N$  elemanlı bir pasif algılayıcı dizimiz olduğunu varsayalım. Algılayıcılar 2 boyutlu uzayda dağıtılmış durumda olsun. (Yapılan işlemleri 3 boyutta gerçekleştirmenin matris boyutları ve polinom derecelerini artırmak dışında getirdiği herhangi bir farklılık yoktur.)  $x = [x \ y]^T$  kaynağın,  $x_i = [x_i \ y_i]^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  ise  $i$ 'nci algılayıcının konumunu ifade etsin. Kaynaktan yayılan işaretlerin  $i$ 'nci algılayıcıya ulaşma süresini  $d_i$  ile ifade edelim. 1'inci algılayıcı referans alındığında,  $i$ 'nci ile 1'inci algılayıcı arasındaki VZF değeri  $d_{i,1} = d_i - d_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  şeklinde hesaplanabilir. Kaynak ile  $i$ 'nci algılayıcı arasındaki mesafeyi  $r_i$  ile gösterelim:

$$r_i = \|x_i - x\|, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Mesafe farklarını  $r_{i,1} = r_i - r_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  şeklinde tanımlayalım. İşaret hızı  $c$  ile ifade edilirse, mesafe farkları  $r_{i,1} = cd_{i,1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  ile hesaplanabilir. Denklem (1)'in karesi alınıp açılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \\ &= x_i^2 + y_i^2 - 2x_i x - 2y_i y + x^2 + y^2, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Denklem (2)'yi, tüm  $i$  değerleri için yazalım ve ardından  $i = 1$  için yazılanı diğerlerinden çıkaralım. Gerekli düzenlemelerin yapılmasının ardından aşağıdaki denklem setini elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} A\theta &= b, \quad (3) \\ A &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & r_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - x_1 & y_N - y_1 & r_{N,1} \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ r_1 \end{bmatrix}, \\ b &= 0.5 \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - r_{2,1}^2 \\ \vdots \\ (x_N - x_1)^2 + (y_N - y_1)^2 - r_{N,1}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$A$  ve  $b$ , algılayıcı konumları ve VZF ölçümleri ile hesaplanabilir.  $\theta$ , kaynak konumu  $x$ 'i elde etmek için kestirimi yapılacak bilinmeyen vektörü temsil etmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta,  $\theta$ 'nın üçüncü elemanının bağımsız bir değişken olmaması ve  $\theta$ 'nın ilk iki elemanının doğrusal olmayan bir fonksiyonu olmasıdır ((2)'de  $i = 1$  alınarak görülebilir). Bu ilişki (3)'ü doğrusal olmayan bir denklem seti yapmaktadır.  $\theta$ 'nın elemanları arasındaki ilişki ihmal edildiğinde, EKK yöntemiyle kestirim sonucu aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\hat{\theta}_{EKK} = \arg \min_{\theta} \{ (b - A\theta)^T (b - A\theta) \} \quad (4)$$

$$= (A^T A)^{-1} A^T b. \quad (5)$$

$$\hat{x}_{EKK} = [(\hat{\theta}_{EKK,1} + x_1) \quad (\hat{\theta}_{EKK,2} + y_1)]^T$$

Problemi eksiksiz tanımlamak için, (4)'teki enküçültme problemine  $\theta$ 'nın elemanları arasındaki koşul ve  $\theta_3 \geq 0$  kısıtını dahil etmek gerekmektedir [1]. Bu da (4)'ü dışbükey olmayan bir eniyileme problemi yapmaktadır.

## III. İKİ AŞAMALI AĞIRLIKLI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ, [7]

[7]'de, konum kestirimi için EKK temelli bir algoritma önerilmiştir. İlk aşamada, kaynak konumu ve  $r_1$  birbirinden bağımsız kabul edilerek EKK yöntemi uygulanmış, ek olarak hata vektörünün ( $\psi = b - A\theta$ ) ortak değişinti matrisi ile EKK ağırlıklı hale getirilmiştir. İkinci adımda,  $\theta$ 'nın elemanları arasındaki bilinen ilişki ikinci bir AEKK aracılığıyla kullanılarak kestirim iyileştirilmiştir. Bildirinin devamında bu yöntem için İAAEKK (iki aşamalı AEKK) kısaltması kullanılacaktır.

VZF ölçümlerinin doğru olan değer  $d_{i,1}^0$  ve sıfır ortalamalı toplanır Gauss gürültüsünden  $n_{i,1}$  oluştuğu kabul edilsin:

$$d_{i,1} = d_{i,1}^0 + n_{i,1}/c, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Gürültü vektörünü  $n \triangleq [n_{2,1}, n_{3,1}, \dots, n_{N,1}]^T$ , gürültüsüz mesafe vektörünü  $B \triangleq \text{diag}\{r_{2,1}^0, r_{3,1}^0, \dots, r_{N,1}^0\}$  şeklinde tanımlayalım. Bu durumda hata vektörünün ortak değişinti matrisi:

$$\text{Cov}(\psi) = \text{cov}(Bn + 0.5n \odot n). \quad (7)$$

$n_{i,1} \ll r_i^0$  olması durumunda, (7)'nin sağındaki ikinci terim ihmal edilerek hata vektörünün ortak değişinti matrisi

$$\Psi \triangleq \text{cov}(\psi) \simeq BQB \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir.  $Q$ ,  $n$ 'nin ortak değişinti matrisini ifade etmektedir.  $\theta$ 'nın elemanlarının bağımsız olduğu kabul edildiğinde, AEKK kestirimi aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\hat{\theta}_{AEKK} = \arg \min_{\theta} \{ (b - A\theta)^T \Psi^{-1} (b - A\theta) \} \quad (9)$$

$$= (A^T \Psi^{-1} A)^{-1} A^T \Psi^{-1} b. \quad (10)$$

$B$ , kaynak ile algılayıcılar arasındaki gerçek mesafeleri içerdiğinden  $\Psi$ 'yi elde etmek mümkün değildir. [7]'de, öncelikle  $B = I$  kabul ederek (10)'un hesaplanması, sonrasında elde edilen konum kestiriminin kullanılarak  $B$ 'nin tahmini değerinin elde edilmesi, ardından sırasıyla (8) ve (10) yardımıyla İAAEKK yönteminin ilk adımının tamamlanması önerilmiştir.

İAAEKK yönteminin ikinci adımında,  $i = 1$  için denklem (2)'de verilen  $x$ ,  $y$  ve  $r_1$  arasındaki ilişki kullanılarak yapılan

yeni bir AEKK ile kestirimin iyileştirilmesi amaçlanmaktadır. Denklem (2),  $i=1$  için aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\mathbf{G}z = \mathbf{h}, \quad (11)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} (x-x_1)^2 \\ (y-y_1)^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{AEKK} \odot \hat{\boldsymbol{\theta}}_{AEKK}.$$

İlk aşamaya benzer şekilde gürültünün karesini içeren terimi ihmal ettiğimizde, hata vektörünün ortak değışinti matrisi

$$\boldsymbol{\Psi}' \simeq 4\mathbf{B}'\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{AEKK})\mathbf{B}' \quad (12)$$

ile ifade edilebilir.  $\mathbf{B}' \triangleq \text{diag}\{x^0-x_1, y^0-y_1, r_1^0\}$  şeklindedir.  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{AEKK}$  ile yaklaşık bir  $\mathbf{B}'$ , ardından (12) ile yaklaşık  $\boldsymbol{\Psi}'$  elde edilir. Ardından ikinci AEKK aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\hat{z} = (\mathbf{G}^T \boldsymbol{\Psi}'^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Psi}'^{-1} \mathbf{h}. \quad (13)$$

İlk adımın sonucu ve kaynağın arandığı alan göz önünde bulundurularak,  $\hat{\mathbf{x}}_{IAEKK} = [\pm\sqrt{\hat{z}_1+x_1}, \pm\sqrt{\hat{z}_2+y_1}]^T$  şeklindeki 4 ihtimalden en uygunu seçilir.

#### IV. KISITLI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ, ([8], [1])

$\boldsymbol{\theta}$ 'nın elemanları arasındaki ilişkiyi EKK çözümüne dahil etmenin bir diğer yolu, Lagrange çarpanı metodunu kullanmaktır. [8]'de önerilen bu yöntemde,  $i = 1$  için (2) denklemi

$$\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\theta} = 0, \quad \boldsymbol{\Sigma} \triangleq \text{diag}(1, 1, -1) \quad (14)$$

şeklinde matris haline getirilerek, (4)'deki enküçültme problemine bir kısıt olarak dahil edilmiş, Lagrange fonksiyonu

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \lambda) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}) + \lambda \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\theta} \quad (15)$$

şeklinde yazılmıştır. Burada  $\lambda$  Lagrange çarpanını ifade etmektedir. Denklem (15)'in  $\boldsymbol{\theta}$ 'ya göre gradyanı alınarak sıfıra eşitlenip, elde edilen denklem  $\boldsymbol{\theta}$  için çözüldüğünde

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{KEKK} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (16)$$

sonucuna ulaşılmış olunur. Bildirinin kalanında bu kestirim metodu KEKK (kısıtlı EKK) kısaltması ile anılacaktır.

Denklem (16)'nın hesaplanabilmesi için, öncelikle  $\lambda$ 'nın elde edilmesi gerekmektedir. Denklem (16), (14)'te yerine koyulup, özdeğer ayrışımı ile  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}$  şeklinde köşegenleştirme yapılarak (14) aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T (\boldsymbol{\Lambda} + \lambda \mathbf{I})^{-2} \mathbf{q} &= 0, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (17)$$

$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  ve  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$   $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$  matrisinin özdeğerleridir. Denklem (17)  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  ve  $\boldsymbol{\Lambda}$ 'nın elemanları cinsinden yazılırsa

$$\sum_{i=1}^3 \frac{p_i q_i}{(\lambda + \gamma_i)^2} = 0 \quad (18)$$

şeklinde 4. dereceden bir polinom elde edilir. 4 kökten doğru olanı uygun bir yöntem ile  $\lambda$  için seçilerek (16)'da yerine koyulduğunda, KEKK kestirimi elde edilmiş olur.

Gerçel bir eniyileme probleminde, Lagrange çarpanı her zaman gerçel bir sayıdır [9]. Bu nedenle (18)'in yalnızca gerçel kökleri arasında bir seçim yapılması gerekmektedir. [9]'da tüm gerçel kökler için kestirim sonuçlarının hesaplanması, ardından

$(\mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta})$  şeklindeki maliyet fonksiyonunu minimum yapan sonucu seçilmesi önerilmiştir.

4. (3 boyutlu uzay için 6.) dereceden bir polinomun tüm köklerini bulmak, ardından bu köklerin tümü için tek tek kestirim sonucu ve maliyet fonksiyonunu elde etmek, hesaplama karmaşıklığı yüksek bir işlemdir. [1]'de, düşük gürültü seviyelerinde, doğru  $\lambda$  değerini (18)'den elde etmek için hesaplama karmaşıklığı çok daha düşük bir yöntem öne sürülmüştür:

$(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}^T \mathbf{A})$  matris çiftinin genelleştirilmiş özdeğerleri arasından  $\zeta_1$  en küçük pozitif,  $\zeta_2$  ise tek negatif özdeğeri temsil etsin. (18)'in  $\lambda$  için  $(-1/\zeta_1, -1/\zeta_2)$  aralığında tek bir köke sahip olduğu; bu kök kullanılarak elde edilen  $\boldsymbol{\theta}$  kestiriminin 3. elemanının ( $r_1$ ) negatif olmaması durumunda, bulunan kökün doğru  $\lambda$  değeri olduğu ve elde edilen kestirimin global optimum sonuç olduğu [1]'de gösterilmiştir. Denklem (18), bahsi geçen aralıkta azalan bir fonksiyon olduğu için kök, aralıkları ikiye bölme yöntemiyle (bisection) kolaylıkla bulunabilir.

#### V. KISITLI AĞIRLIKLIL EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

VZF değerleri, aynı algılayıcının referans seçilmesiyle elde edildiği için birbirleriyle ilintilidir. Bunun yanında, algılayıcıların yapısı ve VZF kestirim yöntemi göz önünde bulundurularak (işlem yapılan frekans bandı, gözlem süresi vb. [7]) VZF değerleri arasındaki ilinti daha doğru hesaplanabilir. Bahsi geçen ilintiler yardımıyla elde edilen VZF vektörünün ortak değışinti matrisi  $\mathbf{Q}$ , EKK temelli yöntemleri ağırlıklı hale getirecek kestirimi iyileştirmek için kullanılabilir. Bu yaklaşım İAAEKK yönteminde (8) ve (10)'da kullanılmıştır. [9]'da aynı yaklaşım [8]'deki KEKK yöntemine uygulanmıştır. Ancak bu yöntemde Lagrange çarpanı [1]'deki gibi elde edilmemiş, (18)'in tüm kökleri için maliyet fonksiyonunun hesaplanması ve en küçük değere karşılık gelen kestirimin seçilmesi gibi hesaplama karmaşıklığı yüksek bir yol önerilmiştir.

Bu çalışmada, [1]'de önerilen KEKK temelli yöntemin, VZF değerlerinin ortak değışinti matrisinin kullanıldığı bir türevini öneriyoruz. Önerdiğimiz yöntem [9] ile aynı yaklaşıma sahip olmakla birlikte, iki temel farkı bulunmaktadır. Bunlardan birincisi; önerdiğimiz yöntemin hesaplama karmaşıklığının, Lagrange çarpanını hesaplama yolunun farklı olması sebebiyle düşük gürültü altında [9]'dan daha az olmasıdır. İkinci fark; iki algoritma da  $\boldsymbol{\theta}$ 'nın elemanları arasındaki ilişkiyi enküçültme problemine dahil ederken, bizim yöntemimizin ek olarak  $r_1 \geq 0$  kısıtını da göz önünde bulundurmasıdır.

Denklem (9) kullanılarak (15) tekrar yazılınsın. Ardından IV. bölümde uygulanan işlemler tekrarlandığında

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{KAEKK} = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{A} + \lambda' \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{b} \quad (19)$$

elde edilir.  $\boldsymbol{\Psi}$  sebebiyle (18) aşağıdaki gibi değışmiştir:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{p'_i q'_i}{(\lambda' + \gamma'_i)^2} = 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{b},$$

$$\gamma'_i : \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \text{ matrisinin } i\text{'nci özdeğeri.}$$

$(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{A})$  matris çiftinin genelleştirilmiş özdeğerleri arasından  $\zeta'_1$  en küçük pozitif özdeğeri,  $\zeta'_2$  ise tek negatif özdeğeri temsil etsin.  $\lambda'$ 'yı bulmak için, (20)'ye  $(-1/\zeta'_1, -1/\zeta'_2)$  aralığında aralıkları ikiye bölme yöntemi uygulanmalıdır. Önerdiğimiz algoritmayı adım adım yazacak olursak:

- 1) VZF değerleri ve algılayıcı konumları kullanılarak  $A$  ve  $b$  oluşturulur.  $B = I$  kabul edilir.
- 2)  $B$  ve (8) yardımıyla  $\Psi$  elde edilir.
- 3) Denklem (20)'de  $\lambda'$  dışındaki bilinmeyenler hesaplanır. Ardından aralıkları ikiye bölme yöntemiyle  $(-1/\zeta'_1, -1/\zeta'_2)$  aralığındaki  $\lambda'$  kökü bulunur.
- 4) (19) ile kaynak konum kestirimi hesaplanır.  $\theta_{KAEKK}$ 'nin 3. elemanı sıfırdan küçük değilse, kestirim sonuç olarak alınır ve 6. adıma geçilir. Küçükse, aşağıdaki adım uygulanır.
- 5) (20)'nin tüm köklerini bulunur. Gerçek sayılı tüm kökler için kestirim (19) ile hesaplanır. Kestirim sonuçları arasından 3. elemanı sıfırdan küçük olmayanlar ve  $[x_1 \ y_1 \ 0]^T$  için maliyet fonksiyonu  $(b - A\theta)^T \Psi^{-1} (b - A\theta)$ 'yi en küçük yapan kestirim sonuç olarak alınır.
- 6) Kestirim sonucu kullanılarak  $B$  matrisi hesaplanır. Ardından 2-6 arası adımlar kestirim sonucu yakınsayana kadar tekrar edilir. Benzetim çalışmaları bir tekrarın genellikle yeterli olduğunu göstermektedir.

## VI. BENZETİM SONUÇLARI

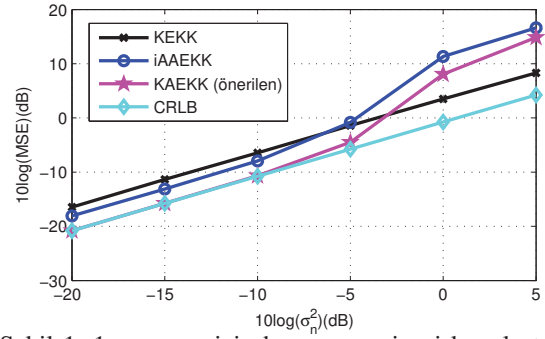
İncelenen iki yöntem ile önerilen yöntemin başarımlarını karşılaştırmak için, iki farklı yerleşim senaryosu üzerinde benzetim çalışmaları yapılmıştır. İşaretin yayılma hızı  $c=1$  kabul edilmiş, V. bölümde önerilen yöntem adımları yalnızca bir kez tekrar edilmiştir. Varış zamanı (VZ) değerleri, gürültüsüz VZ değerlerine toplanır beyaz Gauss gürültüsü eklenerek elde edilmiş; referans seçilen 1. algılayıcının VZ değeri diğerlerinden çıkarılarak gürültülü VZF değerleri oluşturulmuştur.  $Q = \sigma_n^2 (I_{(N-1) \times (N-1)} + \mathbf{1}_{(N-1) \times (N-1)})$  alınmıştır. CRLB hesaplaması için [7]'den faydalanılmıştır.

İlk senaryoda, algılayıcılar (10,0) merkezli, 10 birim yarıçaplı bir çember üzerinde  $(x_1=0, y_1=0)$ ,  $(x_2=5, y_2=-5\sqrt{3})$ ,  $(x_3=15, y_3=-5\sqrt{3})$ ,  $(x_4=20, y_4=0)$ ,  $(x_5=15, y_5=5\sqrt{3})$ ,  $(x_6=5, y_6=5\sqrt{3})$  konumlarına; kaynak ise  $(x=15, y=5)$  konumuna yerleştirilmiştir. Yöntemlerin farklı gürültü ilişintisi seviyeleri için hesaplanan ortalama karesel hata sonuçları, Şekil 1'de görülebilir. Her bir ilişinti seviyesi için 20.000 Monte Carlo benzetimi yapılmıştır. İkinci senaryoda, kaynak ve 6 adet algılayıcının konumları  $[0,10] \times [0,10]$  aralığındaki tekdüze dağılımdan rastgele seçilmiştir. Her bir gürültü seviyesi için 200.000 rastgele yerleşim sonucunun ortalaması alınarak Şekil 2 elde edilmiştir. Gürültüsüz mesafe değerleri ile oluşturulan  $A$  matrisinin koşul sayısını 1.000.000'dan daha büyük yapan yerleşimler benzetime dahil edilmemiştir.

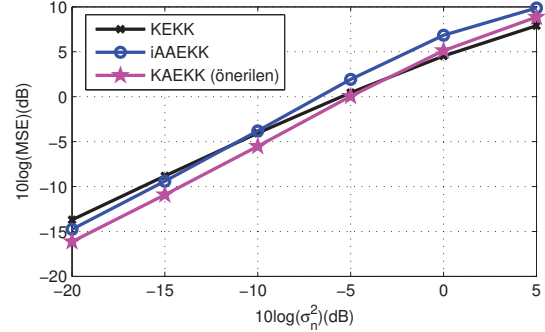
Şekil 1 ve 2'de görüldüğü üzere, KAEKK, İAAEKK'den daha iyi performans göstermektedir. KEKK,  $\Psi$ 'yi kullanmadığı için düşük gürültü seviyelerinde kötü performans göstermiştir. Yüksek gürültü seviyelerinde elde edilen  $\Psi$  matrisi gerçek değerden uzak olduğu için bu bilgiyi kullanan KAEKK ve İAAEKK yöntemlerinin performansı düşmüştür.

## VII. SONUÇ

Bu çalışmada, VZF ile kaynak konumlandırma EKK temelli iki yaygın yöntem olan İAAEKK ve KEKK incelenmiştir. İAAEKK, hata vektörünün ortak ilişinti matrisi  $\Psi$ 'yi kullanırken; KEKK çözüm sürecine bu bilgiyi dahil etmemektedir. KEKK yönteminin  $\Psi$  ağırlıklı bir türevi KAEKK adıyla



Şekil 1: 1. senaryo için başarımlar karşılaştırması



Şekil 2: 2. senaryo için başarımlar karşılaştırması

önerilmiş, bu sayede iki yaklaşımın da aynı bilgileri kullanması sağlanmıştır. İAAEKK'de,  $\theta$ 'nın elemanları arasındaki ilişki ilk adımda ihmal edilmiş, ikinci adımda göz önünde bulundurulmuştur. Önerilen yöntemde ise bahsi geçen ilişki enküçültme problemine en başından dahil edilmiş, ek olarak  $r_1 \geq 0$  kısıtı göz önünde bulundurulmuştur. Bu sebeple, benzetim sonuçlarından da görülebileceği üzere, KAEKK yöntemi İAAEKK'den daha iyi performans göstermektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] A. Beck, P. Stoica, and J. Li, "Exact and approximate solutions of source localization problems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1770–1778, May 2008.
- [2] X. Qu and L. Xie, "An efficient convex constrained weighted least squares source localization algorithm based on TDOA measurements," *Signal Processing*, vol. 119, pp. 142 – 152, 2016.
- [3] L. Lin, H. So, F. K. Chan, Y. Chan, and K. Ho, "A new constrained weighted least squares algorithm for TDOA-based localization," *Signal Processing*, vol. 93, no. 11, pp. 2872 – 2878, 2013.
- [4] W. H. Foy, "Position-location solutions by Taylor-series estimation," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-12, no. 2, pp. 187–194, March 1976.
- [5] B. Friedlander, "A passive localization algorithm and its accuracy analysis," *IEEE J. Ocean. Eng.*, vol. 12, no. 1, pp. 234–245, January 1987.
- [6] P. Stoica and J. Li, "Lecture notes - source localization from range-difference measurements," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 23, no. 6, pp. 63–66, Nov 2006.
- [7] Y. T. Chan and K. C. Ho, "A simple and efficient estimator for hyperbolic location," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 8, pp. 1905–1915, Aug 1994.
- [8] Y. Huang, J. Benesty, G. W. Elko, and R. M. Mersereau, "Real-time passive source localization: a practical linear-correction least-squares approach," *IEEE Speech Audio Process.*, vol. 9, no. 8, pp. 943–956, Nov 2001.
- [9] K. W. Cheung, H.-C. So, W.-K. Ma, and Y.-T. Chan, "A constrained least squares approach to mobile positioning: algorithms and optimality," *EURASIP J Adv Signal Process.*, vol. 2006, no. 1, p. 020858, 2006.