Patlamalı-Kesikli Gözlemler için Parametre Kestirimi
Parameter Estimation For Bursty-Intermittent Observations

Çağatay Candan
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
ccandan@metu.edu.tr

***Özetçe* — Gözlem gürültüsü güç seviyesinin örnekten örneğe değişken olduğu veri toplama ortamındaki parametre kestirim problemi incelenmektedir. Bu çalışmada gürültü sürecine ait parametrelerin değişimi Markov süreç olarak modellenmiş ve Markov sürecin gözlemlenemeyen durum vektörü gizli değişken olarak kestirim problemine eklenmiştir. Beklenti-enbüyütme yöntemi ile hem gizli değişken vektörü hem de ilgilendiğimiz işaret yinelemeli olarak kestirilmektedir. Önerilen yöntem gürültü güç seviyesinin gözlem toplama süresi boyunca değiştiği, patlamalı gürültü ve/veya kesikli işaretin olduğu uygulamalarda işaret değerini kestirme amacıyla kullanılabilir.**

Anahtar Kelimeler—Parametre kestirimi, Gizli Markov model, Beklenti-enbüyütme yöntemi, Cramer-Rao sınırı.

***Abstract*—Parameter estimation problem is examined in the setting where the noise power is allowed to change from sample to sample. Parameters of the noise source is assumed to be generated by a Markov chain whose state sequence is not known by the observation system. Expectation-maximization algorithm is applied for the estimation of desired parameter with the inclusion of unknown state vector of the Markov chain realization as a latent variable. The suggested scheme can be utilized in applications with bursty noise and/or intermittent signals.**

Keywords—Parameter estimation, Hidden Markov models, Expectation-maximization method, Cramer-Rao bound.

I. GİRİŞ

Toplanır gürültü altında parametre kestirimi işaret işlemenin temel problemlerinden biridir. Gürültü dağılımının bilindiği durumda en büyük olabilirlik kestirim yöntemi ile işaret kestirimi yapılabilmekte ve bu kestirim sonucu Cramer-Rao alt sınırı gibi başarım sınırlarıyla karşılaştırılarak kestirimci değerlendirilebilmektedir [1]. Birçok işaret işleme uygulamasında en büyük olabilirlik yöntemini gerçeklemek pratik olarak mümkün olmadığı için alternatif yöntemler geliştirilmesi gerekmektedir. Bu çalışmada gürültü kaynağı parametrelerinin gizli Markov modeli uyarınca değiştiği varsayılmış ve bu model altında kestirim problemi incelenmiştir.

Kalman filtreleme işlemi parametreleri bilinen, doğrusal bir sistem vasıtasıyla üretildiği varsayılan Gauss sürece ait durum vektörünü bağımsız toplanır Gauss gürültüsü altındaki gözlemlerden kestirme işlemini gerçekleştirir, [1, Bölüm 13]. Bu işlem Gauss dağılımlı gürültü altında Gauss dağılımlı süreç kestirimi için ortalama karesel hatayı (OKH) enküçülten kestirimcidir. Gürültü dağılımlarının Gauss olmaması durumunda aynı işlem OKH'yı enküçülten *doğrusal* kestirimcidir. Kalman filtreleme işleminin dayandığı klasik varsayımlardan (ilgilendiğimiz Gauss sürecin Gauss dağılımlı gürültü altında gözlenmesi) uzaklaşıldığı bazı durumlar için benzer eniyileme özelliklerine sahip kestirimciler literatürde bulunmaktadır. Örneğin,

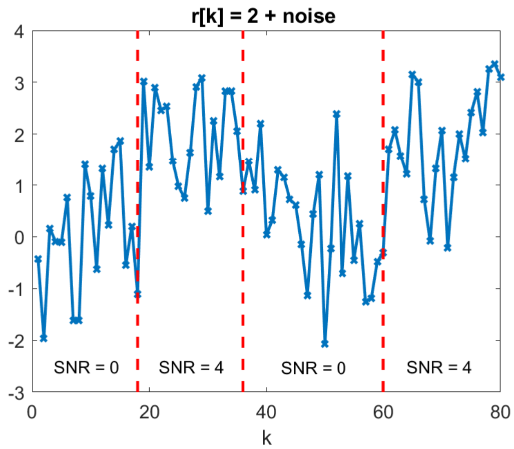
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}[k+1] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \\ \boldsymbol{y}[k] &= \gamma(k)\mathbf{C}\boldsymbol{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{v}[k], \end{aligned}$$

modelinde $\gamma(k)$ değişkenleri yerine 1 değerinin yazıldığı durum klasik Kalman filtreme durumu, $\gamma(k)$ değişkeninin $\{0,1\}$ değerlerini rastgele şekilde aldığı durum ise belirsiz gözlem durumunu olarak adlandırılmaktadır [2]. Modelden görüleceği gibi $\gamma(k)$ değişkeninin 0 değerini alması durumunda $\boldsymbol{y}[k]$ gözlemi ilgilendiğimiz süreç olan $\boldsymbol{x}[k]$'dan bağımsız hale gelmekte ve $\boldsymbol{x}[k]$'nın kestirimi için $\boldsymbol{y}[k]$ gözlemi bir bilgi taşımamaktadır. [2] numaralı çalışmada $\gamma(k)$ rastgele değişkenlerinin bağımsız türdeş Bernoulli dağılımlı olduğu varsayılmış ve bu varsayım altında filtreleme uygulaması için en iyi *doğrusal* kestirimci türetilmiştir. Bu çalışmanın devamı niteliğinde olan [3]'te $\gamma(k)$ değişkeninin bağımsız türdeş olma koşulunun genişletildiği durum için eniyi doğrusal kestirici geliştirilmiştir. [4]'de ise kestirim için kıymet taşıyan gözlem toplama olasılığına ait değerin ($\gamma(k) = 1$ olayı için olasılık değeri) kestiricinin asimptotik başarımına olan etkisi incelenmiş ve bu değerinin belli bir eşik değerinin altında olması durumunda hata kovaryans değerinin hudutsuz şekilde büyüdüğü gösterilmiştir. Bu çalışmada daha basit model olan

$$r[k] = \begin{cases} s + w_0[k] & \text{eğer } \gamma_k = 0 \\ s + w_1[k] & \text{eğer } \gamma_k = 1 \end{cases}, \quad k = \{0, 1, \ldots, K-1\}$$

gözlem modeli için kestirim problemi çalışılmaktadır. Burada s ilgilendiğimiz rastgele olmayan değişken, $w_0[k]$ ve $w_1[k]$ Gauss dağılımlı rastgele değişkenler, γ_k ise 2-durumlu Markov zinciri ile üretilmiş olan $\{0,1\}$ değerlerini alan rastgele değişkendir. İncelenen problem $r[k]$ gözlemlerinden s parametresinin kestirimidir. Yukarıda bahsedilen literatürden temel fark γ_k değerinin Markov zinciri ile üretilmiş olması ve kestirici olarak enbüyük olabilirlik yönteminin kullanılmasıdır. Öte yandan incelenen problem sıçramalı Markov doğrusal sistemlere ait süreç kestirimi probleminin özel bir hali olarak değerlendirilebilir [5]. Şekil 1'de bu özel durum gösterilmektedir. Burada $r[k]$ gözlemlerinin farklı zaman dilimlerinde, farklı işaret-gürültü-oranı (SNR) seviyelerinde toplanma durumu gösterilmektedir. Algılayıcı sistem bazı zaman dilimlerinde işaretten bağımsız

978-1-7281-7206-4/20/$31.00 ©2020 IEEE



Şekil 1: Veri toplama sisteminde patlamalı hatalar olmasından kaynaklı olarak farklı SNR değerlerinde toplanan veriye ait bir gösterim

şekilde sadece gürültü üretmekte (SNR $=0$ durumu), diğer zaman dilimlerinde ise SNR $=4$ koşullarında çalışmaktadır. Algılayıcı sistemin gözlem toplama anındaki durumu (sağlıklı/sağlıksız çalışma durumu) ve bu durumlara ait SNR seviyelerin bilinmediği gözlem toplama ortamında işaret kestirimi (örnekteki s değişkeninin kestirimi) bu çalışmanın hedefidir.

II. Problem Tanımı ve Önerilen Çözüm

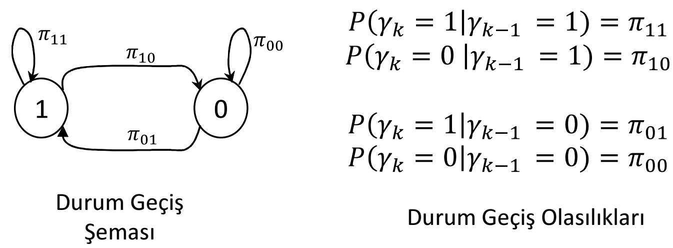
Elimizde aşağıdaki işaret toplama modeli ile elde edilmiş olan K adet gözlem verisi olsun:

$$r[k]=\begin{cases}\alpha_0 s+\beta_0 w[k], & \text{if } \gamma_k=0\\ s+\beta_1 w[k], & \text{if } \gamma_k=1\end{cases}, \; k=\{0,1,\ldots,K-1\}. \tag{1}$$

Yukarıda yer alan s ilgilendiğimiz değişkeni, $w[k]$ bağımsız türdeş sıfır ortalama ve birim değişinti değerli Gauss dağılımlı gürültüyü, $w[k]\sim N(w[k];0,1)$; iki değer alan γ_k değişkeni ise veri toplama sisteminin durumunu göstermektedir. Veri toplama sisteminin sağlıksız çalıştığı $\gamma_k=0$ durumunda, işaret-gürültü-oranı $\text{SNR}_0=s^2\alpha_0^2/\beta_0^2$, diğer durumda ise (sağlıklı çalışma durumu) $\text{SNR}_1=s^2/\beta_1^2$ olmaktadır. $\text{SNR}_0\ll\text{SNR}_1$ olduğu varsayılmıştır.

Veri toplama sisteminin durum dizisi Şekil 2'de gösterilen Markov zinciri yapısı ile modellenmektedir. Bu modelde, örneğin, $k-1$ zamanında sağlıklı çalışan sistemin, bir sonraki anda sağlıklı durumda kalma olasılığı $P(\gamma_k=1|\gamma_{k-1}=1)=\pi_{11}$ ile gösterilmektedir. Bu yapıda π_{11} ve π_{00} değerleri 0.5'den çok daha büyük seçilerek, sistemin bulunduğu durumu koruma olasılığının yüksek olması; böylelikle ölçüm hataların yüksek olduğu bir dizi "kötü" örneğin (patlamalı gürültü) ardından bir dizi doğruluğu yüksek "iyi" örneğin toplandığı çalışma ortamı modellenmektedir. Nümerik bir örnek olarak $\pi_{11}=0.95$ ise sağlıklı veri toplama durumu ortalama olarak $1/(1-\pi_{11})=20$ örnek sürmektedir. Markov zinciri ilk durumu (γ_0 değişkeni) zincirin kalıcı değer olasılığına sahip bir rastgele değişken olarak alınmıştır, daha farklı olarak da alınabilir.

İncelenen problem denklem (1) ile verilen model altında s değişkeninin enbüyük olabilirlik yöntemi ile kestirimidir. Problemde sistem durumunu gösteren γ_k rastgele değişkenleri gizli rastgele değişkenler; $\{s,\alpha_0,\beta_0,\beta_1\}$ değişkenleri ise değerleri bilinmeyen *rastgele olmayan* diğer değişkenlerdir.



Şekil 2: Algılayıcı sistemin durum geçişleri hakkında bilgi

Beklenti-Enbüyütme Yöntemi ile Kestirim: Elimizdeki gözlemlerin alt alta yazılmasıyla oluşturulan $K\times 1$ boyutlu $\boldsymbol{r}$ vektörü ile γ_k değerlerinin benzer şekilde yazılmasıyla oluşturulan $\boldsymbol{\gamma}$ vektörünün (gizli değişkenler vektörü) birleşime eksiksiz gözlem vektörü adı verilmekte ve $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{r};\boldsymbol{\gamma}]$ ile gösterilmektedir. Beklenti-enbüyütme yöntemi eksiksiz gözlem vektörünün işlendiği iki adımdan oluşur:

1. (Beklenti) $Q(\theta^{\text{yeni}})=E\{\log(p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma};\theta^{\text{yeni}}))\mid\boldsymbol{r},\theta^{\text{eski}}\}$
2. (Enbüyütme) $\theta^{\text{yeni}}=\text{argmax}_{\theta^{\text{yeni}}}\,Q(\theta^{\text{yeni}})$

İlk adımın birinci aşamasında eksiksiz gözlem vektörüne ait log-olabilirlik ifadesi $\log(p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma};\theta^{\text{yeni}}))$ yazılır. Bu ifadede geçen θ değişkeni problemdeki bilinmeyen rastgele olmayan değişkenleri göstermektedir, $\theta=[s\;\alpha_0\;\beta_0\;\beta_1]$. Yazılan log-olabilirlik ifadesinin gizli değişkenler üzerinden ortalaması hesaplanarak veya daha doğru bir ifade ile eksiksiz log-olabilirlik fonksiyonun $\boldsymbol{\gamma}$'ya ait ardıl olasılık dağılımı, $p(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{r};\theta^{\text{eski}})$, üzerinden beklenti değeri hesaplanarak ilk adım tamamlanır. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir konu $\boldsymbol{\gamma}$'ya ait ardıl olasılık dağılımı θ^{eski} ile gösterilen bilinmeyen θ vektörüne bir takım sabit nümerik değerler atandıktan sonra hesaplanmasıdır. İkinci adımda, birinci adımın çıktısı olan $Q(\theta^{\text{yeni}})$ fonksiyonu analitik veya nümerik yöntemlerle enbüyütülür. İkinci adımın sonucu olan θ^{yeni} değerleri birinci adımda yer alan θ^{eski} değerleri yerine yerleştirilir ve beklenti-enbüyütme adımları yinelemeli şekilde tekrarlanır. Birçok problemde yöntemin başarısı θ vektörünün ilk seçimine hassasiyet göstermektedir.

Beklenti Adımı: $p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma};\theta)$ ifadesi $p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma};\theta)=p(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{\gamma};\theta)p(\boldsymbol{\gamma})$ şeklinde yazılabilir. Bu problemde $p(\boldsymbol{\gamma})$ fonksiyonu bilinmeyen parametrelere bağlı değildir. Bu durumda $\log(p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma};\theta))=\log(p(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{\gamma};\theta))+c$ olarak yazılabilir. Son eşitlikteki c değeri bilinmeyen parametrelere bağlı olmayan terimleri içermektedir. Beklenti hesabı için ilk olarak $p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{\gamma};\theta)$ ifadesini

$$p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{\gamma};\theta)=\prod_{k=0}^{K-1}N(r[k];s\gamma_k+\alpha_0 s\gamma_k^c,\beta_1^2\gamma_k+\beta_0^2\gamma_k^c) \tag{2}$$

şeklinde yazalım. Burada $\gamma_k^c=1-\gamma_k$ şeklinde tanımlanmıştır ve γ_k, γ_k^c değişkenleri sadece 0 ve 1 değerlerini alan ve birbirlerini tümleyen değişkenler olarak düşünülebilir. Eksiksiz gözlem vektörüne ait log-olabilirlik ifadesini $\Lambda(\boldsymbol{r})=\log(p(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{\gamma};\theta))$ ile gösterirsek, bu ifade

$$\Lambda(\boldsymbol{r})\stackrel{c}{=}-\sum_{k=0}^{K-1}\frac{\log(\beta_1^2\gamma_k+\beta_0^2\gamma_k^c)}{2}+\frac{(r[k]-s\gamma_k-\alpha_0 s\gamma_k^c)^2}{2(\beta_1^2\gamma_k+\beta_0^2\gamma_k^c)} \tag{3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte yer alan $\stackrel{c}{=}$ sembolu eşitliğin sağ tarafında sonucu etkilemeyen daha önce c ile gösterilmiş olan bazı terimlerin yazılmadığını işaret etmektedir. Beklenti adımı $\Lambda(\boldsymbol{r})$ ifadesinin $p(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{r};\theta^{\text{eski}})$ üzerinden beklenti hesabıyla tamamlanır:

$$Q(\theta) = -\sum_{k=0}^{K-1} p_k \left(\frac{\log(\beta_1^2)}{2} + \frac{(r[k]-s)^2}{2\beta_1^2} \right) - \sum_{k=0}^{K-1} (1-p_k) \left(\frac{\log(\beta_0^2)}{2} + \frac{(r[k]-\overbrace{\alpha_0 s}^{\mu_0})^2}{2\beta_0^2} \right). \quad (4)$$

Son ifadede yer alan p_k, gizli değişken γ_k'ya ait ardıl dağılımın 1 değerini alma olasılığını göstermektedir, $p_k = p(\gamma_k = 1\,|\,\boldsymbol{r};\theta^{\text{eski}})$. Ardıl dağılım hesabı enbüyütme adımı sonrasında verilecektir.

Enbüyütme Adımı: Enbüyütme adımı (4)'de verilen ifadenin türev hesabı ile enbüyütülmesidir. Bu ifadede yer alan $\alpha_0 s$ çarpımı analitik çözümü zorlaştırmaktadır. Algılayıcı sistemin kötü çalıştığı durumdaki $\text{SNR}_0 = s^2\alpha_0^2/\beta_0^2$ değerinin iyi çalışma koşullarındaki $\text{SNR}_1 = s^2/\beta_1^2$ çok daha kötü olması beklendiğinden $\alpha_0 s$ çarpımı yerine μ_0 ile gösterilen yeni bir bağımsız değişken atanabilir. Böylelikle enbüyütme işleme basitleştirilmiş olur ve aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} s^{\text{yeni}} &= \frac{1}{\sum_k p_k} \sum_k p_k r[k], \\ \mu_0^{\text{yeni}} &= \frac{1}{\sum_k (1-p_k)} \sum_k (1-p_k) r[k], \\ (\beta_0^2)^{\text{yeni}} &= \frac{1}{\sum_k (1-p_k)} \sum_k (1-p_k)(r[k]-\mu_0^{\text{yeni}})^2, \\ (\beta_1^2)^{\text{yeni}} &= \frac{1}{\sum_k p_k} \sum_k p_k (r[k]-s^{\text{yeni}})^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Ardıl Dağılımın Hesabı: Beklenti adımını gerçekleştirmek için $p(\gamma_k|\boldsymbol{r},\theta^{\text{eski}})$ dağılımına ihtiyaç duyulmaktadır. Ardıl dağılım Şekil 3'te verilen bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerinden $\alpha\beta$ yöntemi ile hesaplanabilir [6].

Bu yöntemde $\alpha(\gamma_k) = p(\gamma_k, r[0], \ldots, r[k])$, $\beta(\gamma_k) = p(r[k+1], \ldots, r[K-1]\,|\,\gamma_k)$ dağılımlarını göstermektedir. α fonksiyonu $\alpha(\gamma_0) = p(\gamma_0)p(r[0]\,|\,\gamma_0;\theta^{\text{eski}})$ ile ilk değeri belirlendikten sonra ve $k \geq 1$ için yinelemeli olarak

$$\alpha(\gamma_k) = p(r[k]\,|\,\gamma_k;\theta^{\text{eski}}) \sum_{t=0}^{1} p(\gamma_k|\gamma_{k-1}=t)\alpha(\gamma_{k-1})$$

ile hesaplanır. β-yinelemesi ise $\beta(\gamma_{K-1}) = 1$ ilk değeriyle, $2 \leq k \leq K-1$ aralığındaki azalan k değerleri için

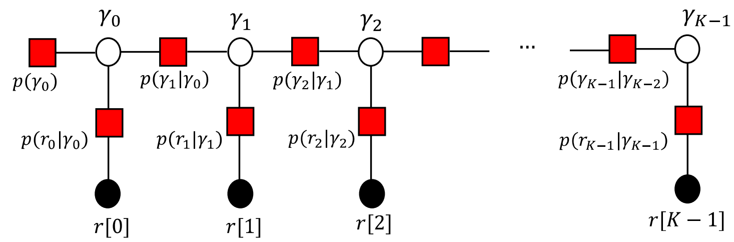
$$\beta(\gamma_{k-1}) = \sum_{t=0}^{1} p(r[k]\,|\,\gamma_k = t;\theta^{\text{eski}}) p(\gamma_k = t\,|\,\gamma_{k-1})\beta(\gamma_k = t)$$

ile hesaplanır. Ardıl dağılım ise

$$p(\gamma_k\,|\,\boldsymbol{r};\theta^{\text{eski}}) = \frac{\alpha(\gamma_k)\beta(\gamma_k)}{\alpha(\gamma_k=0)\beta(\gamma_k=0)+\alpha(\gamma_k=1)\beta(\gamma_k=1)}$$

olur. Gizli Markov yapılarının temelini oluşturan bu hesabın detayları için [6] numaralı makaleye bakabilirsiniz.

Beklenti-Enbüyütme Yöntemi için Başlangıç Noktası: Beklenti-Enbüyütme yönteminde yer alan ardıl dağılım hesabını gerçekleştirmek için θ^{eski} ile gösterilen parametre değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu vektörün ilk değeri Beklenti-Enbüyütme yönteminin başarımı için çoğu problemde kritik önemdedir. Aşağıda θ vektörünün ilk değerini kestirmek için bir yöntem verilmektedir.



Şekil 3: Bileşik yoğunluk fonksiyonuna ait çarpan çizgesi

İlk değeri oluşturmak için veriyi bölütleyerek işaret olan ve olmayan kısımları ayırmayı hedefleyen bir yöntem önereceğiz. Yöntem Şekil 1'deki örnek üzerinden anlatılacaktır. Şekil 1'de yer alan veriyi

$$r[k] = \begin{cases} N(r[k];\mu_1,\sigma_1^2), & c_0 = 0 \leq k < c_1 \\ N(r[k];\mu_2,\sigma_2^2), & c_1 \leq k < c_2 \\ N(r[k];\mu_3,\sigma_3^2), & c_2 \leq k < c_3 \\ N(r[k];\mu_4,\sigma_4^2), & c_3 \leq k \leq c_4 = K-1 \end{cases} \quad (6)$$

c_k ile gösterilen bölüt sınırları, (μ_k, σ_k^2) ile gösterilen parametreleri olan Gauss dağılımlı süreç örnekleri olarak düşünelim. Bu modeldeki parametreleri eldeki veriden enbüyük olabilirlik yöntemi ile kestirerek hem bilinmeyen $\{\mu_k, \sigma_k^2\}$ parametreleri hem de bölüt sınırları için kestirimler elde edebiliriz. Bilinmeyen $\{\mu_k, \sigma_k^2\}$ parametreleri için en büyük olabilirlik kestirimi yapılır ve olabilirlik fonksiyonuna kestirim değerleri yerleştirince, enyüksek olabilirlik değerli bölüt sınırları belirleme problemi $[c_1, c_2, c_3] = \text{argmin}_{c_1,c_2,c_3} J(c_1, c_2, c_3)$

$$J(c_1, c_2, c_3) = \sum_{l=1}^{4} (c_l - c_{l-1}) \log(\sigma^2(r(c_{l-1} : c_l - 1)))$$

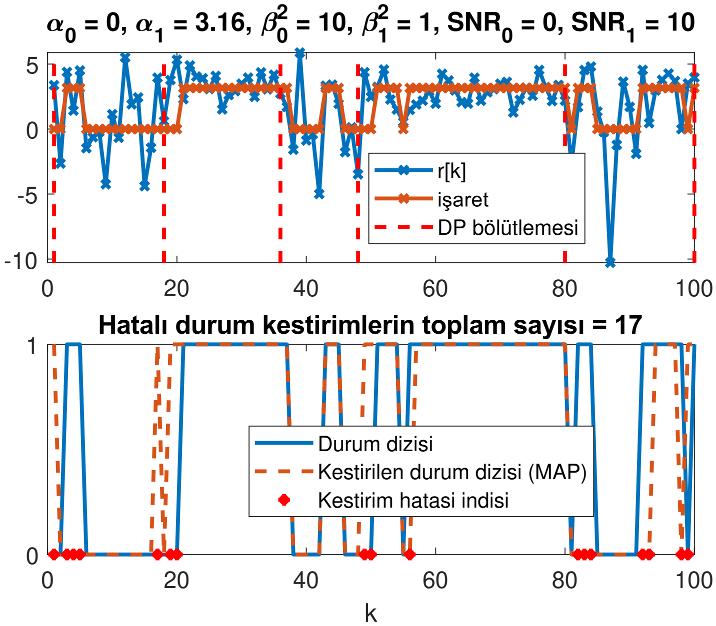
olur. Son ifadedeki $\sigma^2(r(c_{l-1} : c_l - 1))$ fonksiyonu l numaralı bölüte ait yanlı değişinti kestirimidir, $\sigma^2(r(c_{l-1} : c_l - 1)) = \frac{1}{c_l - c_{l-1}} \sum_{k=c_{l-1}}^{c_l - 1} (r_k - \widehat{\mu}_k)^2$, $\widehat{\mu}_k = \frac{1}{c_l - c_{l-1}} \sum_{k=c_{l-1}}^{c_l - 1} r_k$. $J(c_1, c_2, c_3)$ fonksiyonunun enküçültülmesi işlemini dinamik programlama ile verimli şekilde gerçeklemek mümkündür. Verimli gerçeklemenin detayları için [7]'ye bakabilirsiniz.

Yukarıda verilen bölütleme işlemini gerçekleştirmek için bölüt sayısına ihtiyaç duyulmaktadır. Bölüt sayısı kestirimi için model derecesi seçimi yöntemlerinden Bayesci bilgi kriteri (BIC - Bayesian information criterion) kullanılabilir [8]:

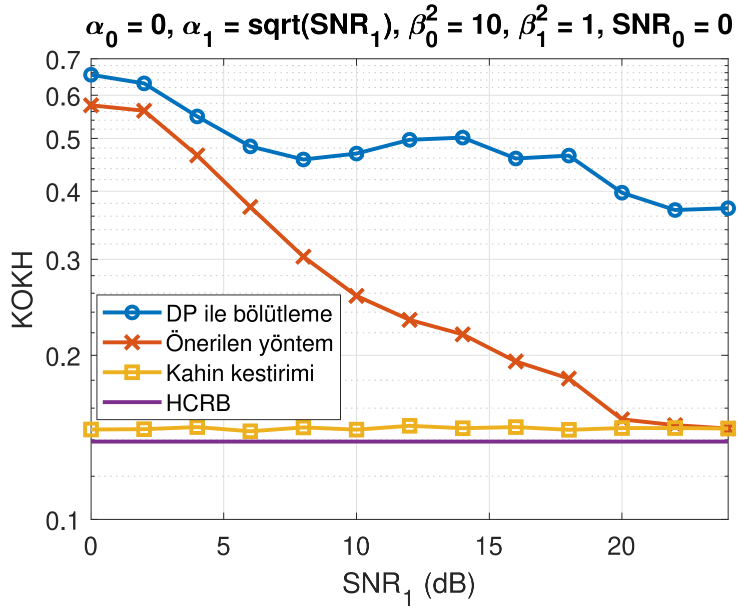
$$\text{BIC}(d) = -2\log\left(\max_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}_n, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_n^2, \boldsymbol{c}_n} p(\boldsymbol{r}; \widehat{\boldsymbol{\mu}}_n, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_n^2, \boldsymbol{c}_n) \right) + (3d-1)\log N.$$

Burada d bölüt sayısını göstermektedir. $\text{BIC}(d)$ değerini enküçülten bölüt sayısı bilgi kriteri seçim sonucudur. $\text{BIC}(d)$ ifadesinde yer alan enbüyük olabilirlik değeri daha önceden bahsedilen ve [7]'de detayları verilen dinamik programlama ile verimli şekilde hesaplanabilir. $\text{BIC}(d)$ ifadesinde yer alan $3d-1$ faktörü d adet bölüt için modeldeki toplam bilinmeyen sayısıdır [8].

Bölütleme işlemi tamamlandıktan sonra gözlem vektörünün bölütler içerisindeki ortalama değeri ve değişinti değerleri hesaplanır. Bulunan ortalama değerler aynı bölütleme işlemi



Şekil 4: Deney koşulları altında gözlemlenen bir koşum örneği



Şekil 5: Kestirim doğruluğu karşılaştırması

ile 2 gruba ayrılır. Yüksek ortalamalı bölütlerdeki örneklerin sağlıklı çalışma durumunda ($\gamma_k = 1$) toplandığı varsayılır ve bu örneklere $p_k = 1$, diğer örneklere $p_k = 0$ ataması yapılır ve denklem (5)'de yer alan ifadeler kullanılarak s, μ_0, β_0^2, β_1^2 parametrelerinin ilk değerleri elde edilir [7].

III. Benzetim Sonuçları

Algılayıcı sisteminin sağlıklı çalışma koşullarında $r[k] = s + w_1$, $w_1 \sim N(0,1)$ modeliyle, diğer durumunda ise $r[k] = w_0, w_0 \sim N(0,10)$ modeliyle veri topladığı varsayılsın. Bu durumda ilgilendiğimiz işaret s sistemin kötü çalışma durumunda gözlemleri etkilememektedir. (Bu senaryo (1)'de $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = \sqrt{10}$, $\beta_1 = 1$ seçimine denk gelmektedir.) Algılayıcı sistemin iyi/kötü çalışma durumları arasındaki geçiş olasılığı $\pi_{01} = \pi_{10} = 0.1$ olarak, sistemin ilk durumu (γ_0) ise eşit olasılıklı şekilde iyi/kötü durumlarından biri olarak seçilsin. Toplam $K = 100$ adet örnek toplandığı varsayılsın.

Şekil 4'de incelenen SNR$_1$ $= 10$ durumunda elde edilen bir koşum gösterilmektedir ($s = \sqrt{\text{SNR}_1}$). Şekil 4'ün üst kısmındaki grafikte mavi ve kahverengi çizgiler sırasıyla gözlemleri ve ilgilendiğimiz işareti göstermektedir. Bazı zaman dilimlerinde işaret gözlemlenememektedir (kesikli işaret durumu). Ayrıca işaretin gözlemlenemediği durumlarda gürültü değişintisi 10 kat artmaktadır (patlamalı gürültü). Üst grafikte verinin dinamik programlama ile bölütlenmesi sonucunda elde edilen bölüt sınırları gösterilmektedir. Dinamik programla ile hesaplanan bilinmeyen parametrelerin beklenti-enbüyütme yöntemi ile işlenmesinden sonra elde edilen algılayıcı sistem durum kestirimi Şekil 4'ün ikinci parçasında verilmektedir. Bu deneyde eldeki 100 örnekten 17 tanesine ait durumun yanlış kestirildiği görülmektedir. Hatalı kestirimler çoğunlukla işaretin kısa süreli olarak gözüktüğü zaman dilimlerine aittir.

Şekil 5'de sistemin sağlıklı çalışma durumuna ait farklı SNR$_1$ değerleri için önerilen yöntemin kök ortalama karesel hata (KOKH) değeri gösterilmiştir. Şekilde önerilen yöntemin ilk aşaması olarak düşünülebilecek olan dinamik programlama temelli bölütleme yönteminin kestirim başarısı, gizli değişkenlere ait durum vektörünü hatasız şekilde bilen kahin kestirimcisinin başarısı ve başarım alt sınırı olarak hibrit Cramer-Rao sınırı (HCRB - Hybrid Cramer Rao Bound) verilmektedir. Sonuçlar beklenti-enbüyütme yinelemelerinin parametre kestirim doğruluğunu önemli ölçüde artırdığı göstermektedir.

IV. Sonuç

Bu çalışmada klasik yaklaşıma göre daha karmaşık yapılı bir gürültü modeli altında parametre kestirim problemi incelenmektedir. Verilen yöntem gürültünün patlamalı, işaretin kesikli olduğu durumların tekil veya beraber olarak yaşandığı (benzetim sonuçları kısmındaki örnekte olduğu gibi) uygulamalarda kullanılabilir. Yöntem, işarete ait gözlemleri üreten algılayıcı sistemin kesikli olarak yaşanan girişim etkilerinden dolayı hatalı sonuçlar üretebildiği uygulamalar için geliştirilmiştir. Yöntemin başarımı bulut üzerinde bulunan, kullanıma hazır MATLAB kodları çalıştırılarak incelenebilir [7].

Kaynaklar

[1] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume 1: Estimation Theory* . Prentice Hall, 1993.

[2] N. Nahi, "Optimal recursive estimation with uncertain observation," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 457–462, 1969.

[3] M. Hadidi and S. Schwartz, "Linear recursive state estimators under uncertain observations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 24, no. 6, pp. 944–948, 1979.

[4] B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, M. I. Jordan, and S. S. Sastry, "Kalman filtering with intermittent observations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1453–1464, 2004.

[5] A. Logothetis and V. Krishnamurthy, "Expectation maximization algorithms for MAP estimation of jump Markov linear systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, no. 8, pp. 2139–2156, 1999.

[6] D. Barber and A. T. Cemgil, "Graphical models for time-series," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 27, no. 6, pp. 18–28, 2010.

[7] C. Candan. (2020) Parameter Estimation For Bursty-Intermittent Observations (MATLAB Code). [Online]. Available: https://codeocean.com/capsule/4933635/tree

[8] P. Stoica and Y. Selen, "Model-order selection: a review of information criterion rules," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 21, no. 4, pp. 36–47, 2004.