

Harmonik İşaretlerin Hassas Frekans Kestirimi İçin Düşük İşlem Yüklü Bir Yöntem

A Computationally Efficient Fine Frequency Estimation Method for Harmonic Signals

Utku Çelebi, Çağatay Candan

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Ankara, Türkiye
{ucelebi,ccandan}@metu.edu.tr

Özetçe—Harmonik ilişkili bir grup karmaşık sinüzoidin temel frekansının kestirimi için düşük hesaplama yüküne sahip bir yöntem verilmektedir. Önerilen yöntem tek tonlu sinüzoidlerin frekans kestirimi problemi için geliştirilen bir yöntemin harmonik duruma uyarlanmasıdır. Önerilen Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) tabanlı yöntemin çalışma prensibi, karmaşık sinüzoidlerin birbirleri üzerine girişimlerini ortadan kaldırarak, her bir karmaşık sinüzoidin frekansını ayrı ayrı kestirmek ve bu kestirilmiş harmonik ilişkili frekans değerlerini birleştirerek temel frekans kestirimi elde etmektir. Önerilen kestiricinin başarımı kuramsal olarak incelenmiş ve benzetim sonuçlarıyla doğrulanmıştır.

Anahtar Kelimeler—Frekans kestirim, Temel frekans kestirimi, Periyodik işaretler.

Abstract—A computationally efficient method for the fundamental frequency estimation of a group of harmonically related complex sinusoids is given. To this aim, an efficient frequency estimation method for single tone complex sinusoids is adapted to the harmonic frequency estimation problem. The main idea of suggested Fast Fourier Transform (FFT) based method is the frequency estimation of individual complex sinusoids after the removal of the interference over the tone by other harmonics. After several iterations of estimation and interference cancellation, frequency estimates of each harmonic component are fused to obtain the fundamental frequency estimate. A theoretical study of the suggested scheme and its experimental verification is provided.

Keywords—Frequency estimation, Pitch frequency estimation, Fundamental frequency estimation, Periodic signals.

I. GİRİŞ

Harmonik ilişkili bir dizi karmaşık üstel işaretin toplamından temel frekans kestirimi problemiyle işaret işleme uygulamalarında sıklıkla karşılaşmaktadır. Çözüm için maksimum olabilirlik (MO) [1], filtreleme, alt uzay yöntemleri (MUSIC, ESPRIT) [2]–[4] gibi çeşitli yöntemler literatürde önerilmiştir. Maximum olabilirlik kestirim (MOK) yönteminin yüksek örnekleme altında en iyi performansa sahip olduğu bilinmektedir. Ama MOK yöntemi literatürdeki en önemli yaklaşım olmasına karşın, hesaplama açısından en maliyetli yöntemdir. Bazı şartlar altında, Yaklaşık Doğrusal Olmayan En Küçük Kareler (YDOEKK) kestirimi olarak da bilinen bu yöntemin, özellikle birden fazla üstel işaretin gözlemlendiği durumlarda, hesaplama miktarı kat ve kat artmaktadır. Bunun sebebi kestirim sonucu olabilecek tüm frekans değerlerini deneyerek bir sonuca varma işleminden kaynaklıdır ve bu

işlem ızgara araması olarak adlandırılmaktadır. Izgara aralıkları ne kadar küçük seçilirse, özellikle işaretin yüksek işaret gürlüğü oranına (İGO) sahip olduğu durumlarda, performansı arttırmak için, hesaplama miktarı büyük miktarda artmaktadır. Alt uzay yöntemleri (MUSIC, ESPRIT), birden fazla karmaşık sinüzoidin aynı anda gözlemlendiği durumlarda hesaplama açısından YDOEKK yönteminden daha etkili olmasıyla bilinmektedir. Ancak bu yöntemler için, sinyalin ortak değişinti matrisi gereklidir ve bu da çok sayıda gözlem vektörüne ihtiyaç duyulmasına sebep olur. MUSIC [2] yöntemi, YDOEKK gibi ızgara aramasına ihtiyaç duymaktadır, ancak ESPRIT [3], [4] bu problemten muzdarip değildir. MUSIC yönteminin yüksek örnekleme ve işaretin birçok kez gözlemlenmesi durumunda YDOEKK yönteminin performansına yaklaştığı bilinmektedir ancak bu yöntemlerin YDOEKK yönteminden performans açısından daha kötü olduğu durumlar fazlasıyla mevcuttur. Temel frekans kestirimi konusu [1]'de detaylı olarak işlenmektedir.

Son yıllarda tek bir karmaşık üstel işaret için Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) temelli, hesaplama açısından verimli olan ve başarımı Cramer-Rao Alt Sınırına (CRAS) çok yakın olan birkaç frekans kestirim yöntemi önerilmiştir [5], [6]. Bu bildiri yüksek başarılı bu yöntemlerden AM yönteminin [6] harmonik ilişkili karmaşık üstelin toplamından oluşan işaretin temel frekans kestirim problemine uyarlanması anlatılmaktadır. AM yönteminin kullanılmasının en önemli sebebi ızgara aramasına ihtiyaç duymaması ve matematiksel olarak basit bir algoritma ile başarılı bir kestirim elde edebilmesidir.

Bu çalışmada [7]'de verilen yöntemin yinelemeli kestirim ve çıkarma stratejisi, toplam halinde olan karmaşık üstellerin frekans kestirimlerini tek tek elde etmek için uygulanmıştır. [8]'de aynı yaklaşım kullanılarak harmonik yapısında olmayan birden fazla üstel sinyalin toplamından oluşan girdi işaretindeki her bir üstel için frekans kestirimi çalışılmaktadır. Bu yöntemde [7]'dekine benzer karmaşık genliklerin yinelemeli olarak kestirimi mevcuttur.

Önerilen yöntem ile, hesaplama yükünü azaltmak için, belli bir noktada karmaşık genlik kestirimini yapılmadığı bir fikir sunulmaktadır. Diğer çalışmalardan farklı olarak temel frekans kestirimine özgü olan bu çalışmada, karmaşık üstellerin (harmoniklerin) frekans kestirimleri arasındaki ilişkiye özel bir birleştirme kuralı türetilmiştir. Böylelikle gözlemlenen işaretteki tüm bilginin kullanılması mümkün olmuştur. Kuramsal bir analizle kestirim sonucunun sahip olacağı kök karesel ortalama hata (KKOH) hesaplanmıştır ve benzetim sonuçları ile doğrulanması yapılmıştır.

II. ÖN BİLGİLER

Temel frekansın katları olan frekanslara sahip bir dizi karmaşık sinüzoid ($\omega_0 = 2\pi f_0$), sıfır ortalamalı ve σ_w^2 değerinde değişintiye sahip toplanır karmaşık beyaz Gauss gürültüsü, $w[n]$, altında aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$r[n] = \sum_{l=1}^L A_l e^{j(\omega_0 l n + \phi_l)} + w[n], \quad n = \{0, \dots, N-1\}. \quad (1)$$

Burada N örnek sayısına, A_l ve ϕ_l , l 'inci harmoniğin genlik ve fazına karşılık gelmektedir. L toplam harmonik sayısıdır ve model derecesi olarak da adlandırılmaktadır. Eğer $\omega_0 L < 2\pi$ eşitsizliği sağlanıyorsa, farklı frekanslardan gelen bilgilerin birbirlerine karışmaması ve denklem (1)'de verilen gözlemlere HFD uygulandığında her bir frekansa ait bilginin birbirlerinden bağımsız olarak çıkarılması mümkündür.

Bu çalışmada frekans değişkeni f_0 , $[0, 1/L]$ aralığında tanımlanmıştır ve şu şekilde ifade edilebilir, $f_0 = \frac{(k_p + \delta)}{N}$. Bu tanımda normalize edilmiş frekans değeri olan $k_p + \delta$, Ayırık Fourier Dönüşümü (AFD) örnekleri cinsinden frekans temsil etmektedir. k_p bir sayma sayısı olup $(0, N/L)$ aralığındadır. Diğer değişken δ ise $\delta \in [-0.5, 0.5]$ aralığındaki gerçel bir sayıdır. Gürültü, $w[n]$, dairesel olarak simetrik yapıdaki karmaşık Gauss dağılımlı olup sıfır ortalamaya ve σ_w^2 değeri değişintiye sahiptir, $w[n] \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_w^2)$. Harmoniklerin olduğu bu durumda, sözde işaret-gürültü oranı (SİGO) şu şekilde tanımlanmaktadır [1]:

$$\text{SİGO} = \frac{\sum_{l=1}^L A_l^2 l^2}{\sigma_w^2}. \quad (2)$$

Denklem (1)'de verilen işaret modeli aşağıdaki şekilde

$$\begin{bmatrix} r[0] \\ r[1] \\ \vdots \\ r[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega_0} & \dots & e^{j\omega_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\omega_0(N-1)} & \dots & e^{j\omega_0 L(N-1)} \end{bmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{w},$$

ya da vektörel olarak

$$\mathbf{r} = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \mathbf{w} \quad (3)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ gözlem vektörünü, $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{N \times L}$ bir Vandermonde matrisini, $\mathbf{a} = [A_1 e^{j\phi_1}, A_2 e^{j\phi_2}, \dots, A_L e^{j\phi_L}]^T$, karmaşık genliklerin oluşturduğu vektörü ve $\mathbf{w} = [w[0], w[1], \dots, w[N-1]]^T$, karmaşık gürültü vektörünü göstermektedir.

YDOEKK yöntemi ile temel frekans kestirimi [1],

$$\hat{\omega}_0 = \arg \max_{\omega_0} \sum_{l=1}^L \left| \sum_{n=0}^{N-1} r[n] e^{-j\omega_0 l n} \right|^2, \quad (4)$$

şeklinde yazılır. Aynı zamanda verilen model için MOK de olan bu yöntem, Ayırık Zamanlı Fourier Dönüşümü (AZFD) spektrumundaki temel frekans ve harmoniklere karşılık gelen mutlak genliklerin toplanması ve farklı temel frekans adayları için bu işlemin tekrarlanıp en büyük toplam değerine sahip olan temel frekansın seçilmesidir. Bu çalışmada MOK yerine kullanılabilir çok daha düşük karmaşıklığa sahip bir yöntem verilmektedir.

Kestirici karşılaştırması için yüksek örnek sayısında, $N \gg 1$, geçerli olan Asimptotik Cramer-Rao Alt Sınırı (ACRAS) şu şekilde yazılabilir, [1]:

$$\text{var}(\hat{f}_0) \geq \frac{3\sigma_w^2}{2\pi^2 N(N^2 - 1) \sum_{l=1}^L A_l^2 l^2} = \frac{3/2\pi^2}{N(N^2 - 1) \text{SİGO}}. \quad (5)$$

III. ÖNERİLEN YÖNTEM

Önerilen kestirim yöntemi iki adımdan oluşmaktadır. İlk adımda kaba bir frekans kestirimi yapılarak, bilinmeyen frekans değeri olan $k_p + \delta$ değerinin tam sayı kısmının kestirimini gösteren \hat{k}_p elde edilir.

Kaba frekans kestirimi adımında (4)'de verilen ifade, büyük AFD aralıklarıyla hesaplanır ve öncül bir frekans kestirimi elde edilir. Geniş AFD aralıklarının veya düşük noktalı bir AFD kullanılmasının sebebi, bu hesabın küçük aralıklar alındığında hesaplama açısından yüklü olmasıdır. Sonuç olarak, gözlemlenen işaretin, N -noktalı AFD, $R[k] = \sum_{n=0}^{N-1} r[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ şeklinde gösterilirse, \hat{k}_p kestirimi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\hat{k}_p = \arg \max_{1 \leq k < N/L} \sum_{l=1}^L |R[kl]|^2. \quad (6)$$

İlk aşama başarımındaki doğruluğu artırmak için daha yüksek noktalı, örneğin $5N$ -noktalı AFD hesaplanarak aynı işlem yapılabilir. İlk aşamadaki başarımla artış özellikle düşük İGO bölgesindeki kestiricinin nihai başarımını etkilemektedir.

İkinci adımda, AM [6] ve YSA [7] algoritmaları kullanılarak hassas frekans kestirimi yapılmaktadır. YSA algoritmasının ana fikri, gerçel bir sinüzoid işaretin frekans kestirimini yapmak için bu işareti iki karmaşık üstelin toplamı olarak düşünüp, negatif frekansa denk gelen üstelin etkisini gözlemlenen işaretten çıkararak, gerçel bir sinüzoid frekans kestirim problemini, karmaşık üstel bir işaretin frekans kestirimine dönüştürmektir. Bildiride bu yaklaşım karmaşık üstelerin toplamı olan harmonik işaretlere uygulanmaktadır. İşaretin harmonikleri kestirilip ve ardından gözlem çıkartılarak, temel frekans kestiriminin TABLO I'de gösterildiği gibi yapılması önerilmektedir. Bu algortmada YSA yaklaşımındaki gibi önce diğer frekanslardan gelen kalıntıları girdi sinyalinden çıkarıp sonra AM metodunu kullanarak frekans kestirimi yapma ve daha doğru bir sonuca ulaşmak için bunu birkaç kere tekrarlama mantığı söz konusudur.

Çıkartma işlemleri sonrasındaki frekans kestiriminin AM yöntemi ile gerçekleştirilmesi önerilmektedir. Bu nedenle AM yönteminin çalışma prensibini anlamak önerilen yöntem için önemlidir. AM yöntemi karmaşık üstel sinyallerin frekans kestiriminde kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde de ilk olarak, normalize edilmiş temel frekansın tam sayı kısmının kestirimi, \hat{k}_p , yapılır. Yüksek İGO değerinde bu kestirim hatasız bir şekilde gerçekleştiği için bundan sonraki anlatımlarda yüksek İGO varsayılarak, \hat{k}_p yerine k_p kullanılmaktadır. İşaretin $k_p + \delta \pm 0.5$ numaralı AFD frekans noktasındaki değeri, R_p ,

$$\begin{aligned} R_p &= \sum_{k=0}^{N-1} A e^{j(\frac{2\pi}{N}(k_p + \delta)k + \phi)} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(k_p + \delta + p)}, \\ &= A e^{j\phi} \frac{1 + e^{j2\pi(\delta - \hat{\delta})}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(\delta - \hat{\delta} - p)}}, \quad p = \pm 0.5. \end{aligned} \quad (7)$$

olarak ifade edilir. Bu ifadede yer alan $\hat{\delta}$ gerçel δ değerinin bir kestirimi olarak düşünülebilir ve yinelemeli olarak kestirilecektir. Bu değer ilk yinelemede 0 olduğu düşünülürse, R_p değeri $R[k_p + p]$ 'ye eşittir, yani N -noktalı AFD hücreleri arasında k_p numaralı hücreden yarım hücre ileride veya geride olan bir frekans noktasındaki işaretin ayırık Fourier dönüşümü değeridir.

Bu bilgiler ışığında AM algoritmasının gürültüsüz ortamda

verdiği sonuç aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \text{Oran} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{R_{0.5} + R_{-0.5}}{R_{0.5} - R_{-0.5}} \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2 - 2e^{j\frac{2\pi}{N}\delta} \cos(\frac{\pi}{N})}{-j2e^{j\frac{2\pi}{N}\delta} \sin(\frac{\pi}{N})} \right\}, \quad (\tilde{\delta} = \delta - \hat{\delta}) \quad (8) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{2\pi}{N}\tilde{\delta})}{\sin(\frac{\pi}{N})} \approx \tilde{\delta}, \quad (2\pi\tilde{\delta} \ll N, \pi \ll N) \end{aligned}$$

Denklem (8)'den görüldüğü gibi bu işlemin sonucu ilk tahmin ile gerçek δ arasındaki farka yaklaşık olarak eşit olmaktadır. Bu sonucu ilk tahmine eklersek δ için yeni bir kestirim elde etmiş oluruz. Yeni kestirim, (7)'deki denklemde $\hat{\delta}$ yerine koyulup, (8)'deki işlem tekrarlandığında daha iyi bir kestirim elde edilebilmektedir.

TABLO I'de verilen yöntem özetinde gösterildiği gibi ilk olarak kaba kestirim ve ardından hassas temel frekans kestirimi (AM) yapıldıktan sonra Vandermonde matrisi, \mathbf{Z} , (3) oluşturulur ve harmonik elemanların karmaşık genlikleri kestirilir. Bunun amacı harmoniklere ait bilgiyi gözlemlenen işaretten çıkartıp, tekrar aynı hassas kestirim yapıldığında daha iyi bir temel frekans kestirimi elde etmektir. Bu aşamada temel frekansa karşılık gelen karmaşık üstel haricinde geri kalan harmoniklere ait üsteller girdi işaretinden çıkartılır ve tekrar temel frekans kestirimi yapılır.

Karmaşık genliklerin kestirimi en Küçük Kareler Kestirimi (EKK) yöntemi aşağıdaki gibi yapılabilir:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \mathbf{r}. \quad (9)$$

Kestirim Hatası Analizi: Denklem 8'de gürültü olmayan durumda AM yönteminin çalışması verilmektedir. Gürültü mevcut ise bu denklem,

$$\begin{aligned} \text{Oran}_{w/n} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{R_{0.5} + R_{-0.5} + W[0.5] + W[-0.5]}{R_{0.5} - R_{-0.5} + W[0.5] - W[-0.5]} \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{S_1 + W[0.5] + W[-0.5]}{S_2 + W[0.5] - W[-0.5]} \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{S_1/S_2 + (W[0.5] + W[-0.5])/S_2}{1 + (W[0.5] - W[-0.5])/S_2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(1 - (W[0.5] - W[-0.5])/S_2)}{(1 - (W[0.5] - W[-0.5])/S_2)} \right\}, \\ &\approx \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{S_1}{S_2} + \frac{W[0.5] + W[-0.5]}{S_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{S_1(W[0.5] - W[-0.5])}{S_2^2} \right\}, \\ &= \tilde{\delta} + \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{N})}{4A \sin(\frac{\pi}{N})} \operatorname{Re} \left\{ je^{-j\phi}(W[0.5] + W[-0.5]) \right\} \\ &\quad + \frac{(1 - \cos(\frac{\pi}{N}))^2}{4A \sin^2(\frac{\pi}{N})} \operatorname{Re} \left\{ e^{-j\phi}(W[0.5] - W[-0.5]) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda tanımlanmış olan değişkenler şunlardır: $W[p] = \sum_{k=0}^{N-1} w[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(k_p + \delta + p)}$, $S_1 = Ae^{j\phi}(1 + e^{j2\pi(\delta - \hat{\delta})}) \approx 2Ae^{j\phi}$, $S_2 = \frac{-jS_1 \sin(\frac{\pi}{N})}{1 - \cos(\frac{\pi}{N})}$.

Ara adımları atlayarak, kestirilmiş δ 'nın değışintisi şu

TABLO I: Önerilen Yöntemin Detaylı Algoritması

Algoritma: Önerilen Yöntem	
Girdi:	$r[n]$: Temel frekans ve harmoniklerinden oluşan girdi işareti (N örnekleme).
Çıktı:	$\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi}{N}(k_p + \hat{\delta})$ rad./sample.
1	$R[k] = \text{fft}(r[n], N)$ (N -noktada FFT hesaplaması).
2	$\hat{k}_p = \arg \max_{1 \leq k < N/L} \sum_{l=1}^L R[kl] ^2$.
3	for $i = 1$: yineleme sayısı
4	AM metodunu uygula ve \hat{s}_1 değerini kestir.
5	Bir önceki adımdaki frekans kestirimini kullanarak \mathbf{Z} matrisini oluştur (3).
6	\mathbf{Z} matrisini kullanarak, harmoniklere ait kompleks genlik vektörünü, $\hat{\mathbf{a}}$, kestir (9).
7	Girdi işaretinden, $r[n]$ (1), harmonikleri çıkar ve artık bu sonucu girdi işareti olarak algoritmada kullan.
8	end for
9	return \hat{s}_1 değerini ve $\hat{\mathbf{a}}$ vektörünü elinde tut.
10	for $m = 2 : L$
11	for $i = 1$: yineleme sayısı
12	AM metodunu uygula ve \hat{s}_m değerini kestir.
13	Girdi işaretinden, $r[n]$, m 'inci harmonik haricindeki harmonikleri ve temel frekansa ait üsteli çıkar, artık bu sonucu girdi işareti olarak algoritmada kullan.
14	end for
15	return \hat{s}_m değerini elde et.
16	end for
17	return $[\hat{s}_2 \dots \hat{s}_{L-1} \hat{s}_L]^T$ vektörünü elde et.
18	Birleştirme kuralını (13), $\hat{\mathbf{a}}$ vektörünü de kullanarak, $\mathbf{s} = [\hat{s}_1 \hat{s}_2 \dots \hat{s}_{L-1} \hat{s}_L]^T$ vektörü üzerinde uygula.
19	Return temel frekans kestirimi, $\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi}{N}(k_p + \hat{\delta})$

şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\delta}) &= \frac{(\tan^2(\frac{\pi}{2N}) + \tan^4(\frac{\pi}{2N}))N}{16\text{İGO}}, \\ &= \frac{N \tan^2(\frac{\pi}{2N}) \sec^2(\frac{\pi}{2N})}{16\text{İGO}}, \\ &= \frac{\pi^2}{64N\text{İGO}} = \frac{c}{A^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Yukarıdaki denklemde yer alan c sabiti $c = \frac{\sigma_w^2 \pi^2}{64N}$ olarak tanımlanmıştır. Bu tanım $N \gg 1$ olduğu yani $\tan(\frac{\pi}{2N}) \approx \frac{\pi}{2N}$, $\sec(\frac{\pi}{2N}) \approx 1$ zaman geçerlidir. Kestirim hatasını gösteren numaralı ifade yeterli sayıda yineleme yapıldıktan sonra yüksek İGO'da ulaşılan kuramsal değerdir.

Harmonik frekans değerlerinin temel frekansın bir katı olduğu unutulmamalıdır. Bu nedenle temel frekansa karşılık gelen üstele yapılan işlemlerin, harmonikler için de ayrı ayrı uygulanarak harmonik frekans kestirimi yapılması, temel frekans kestiriminde yararlı olacaktır. TABLO I'de verildiği gibi önerilen yöntemde temel frekansa ait olan üstel ve harmonikleri için frekans değerleri teker teker kestirilmektedir.

Kestirilen Harmonik Frekanslarından Temel Frekans Kestiriminin Üretilmesi: Karmaşık Gauss dağılımlı sıfır ortalamalı, $\frac{c}{A^2 N^2}$ değışintiyeye sahip gürültüyü, n_k olarak yazdığımızda, k 'inci harmonikten kestirilen frekans değeri $\hat{s}_k = kf_0 + n_k$ şeklinde ifade edilebilir ($\hat{s}_k = k\hat{f}_0 = k(k_p + \hat{\delta})/N$).

Tüm harmonik frekans kestirimlerinin benzer şekilde yazılmasıyla oluşturulan vektör $\mathbf{s} = [\hat{s}_1 \hat{s}_2 \dots \hat{s}_{L-1} \hat{s}_L]^T$ şeklinde ifade edilebilir. Gürültü bileşenlerini (n_1, n_2, \dots, n_L),

birbirlerinden bağımsız olarak düşündüğümüz zaman, En İyi Doğrusal Sapmasız Kestirici (EDSK) [9] kullanılarak, temel frekans kestirimi aşağıda gösterildiği şekilde yapılabilir:

$$\hat{f}_0 = \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{m}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{m}}. \quad (12)$$

Yukarıdaki denklemde, $\mathbf{m} = [1 \ 2 \ \dots \ L]^T$ ve \mathbf{K} matrisi, \mathbf{s} vektörüne ait kovaryans matrisidir. Gürültü bağımsız olduğu için $\mathbf{K}_{L \times L}$ matrisi köşegen matristir ve köşegen üzerindeki değerleri $\frac{c}{A_m^2 N^2}$, $m = \{1, 2, \dots, L\}$ olmaktadır. (12) numaralı denklem kullanılarak harmonik frekans kestirimleri birleştirilir ve temel frekans kestirimi aşağıda gösterildiği gibi üretilir:

$$\hat{f}_0 = \frac{A_1^2 \hat{s}_1 + 2A_2^2 \hat{s}_2 + \dots + LA_L^2 \hat{s}_L}{A_1^2 + 2A_2^2 + \dots + LA_L^2}. \quad (13)$$

Bu birleştirme işleminin sonucunda ortaya çıkan frekans kestiriminin değıştisi,

$$\text{var}(\hat{f}_0) = \text{var} \left(\frac{A_1^2 \hat{s}_1 + 2A_2^2 \hat{s}_2 + \dots + LA_L^2 \hat{s}_L}{A_1^2 + 2A_2^2 + \dots + LA_L^2} \right), \quad (14)$$

$$= \frac{\pi^2}{64N^3 \text{SİGO}}.$$

şeklinde ifade edilebilir. Kestirim hatası değışinti değeri (5)'deki ACRAS alt sınırından $N \gg 1$ için $\pi^4/96 \approx 1.015$ kat daha büyük olduğu görülmektedir.

IV. BENZETİM SONUÇLARI

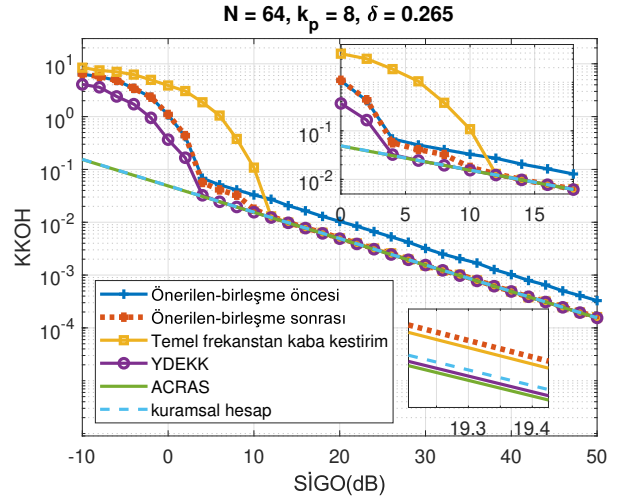
Bu bölümde, birkaç farklı algoritmanın KKOH karşılaştırması yapılmaktadır. MATLAB ortamında (15)'deki işaret, farklı SİGO değerleri için üretilmiştir. Her bir SİGO değerinde, KKOH'ın hesaplanabilmesi için 1000 Monte Carlo benzetimi kullanılmıştır. A_1 , A_2 ve A_3 değerleri arasındaki ilişki $A_1 = 2A_2 = 2A_3$ şeklindedir. Benzetim sonuçlarının çıkarılması aşamasında, N değeri 64 olarak seçilmiştir. Bu değerin artırılmasının ya da azaltılmasının hesaplama açısından önerilen yöntem etkisi, yalnızca N -noktalı AFD hesaplamasının zaman maliyeti üzerindeki değışimidir. Bu maliyetin değeri $N \log_2 N$ mertebesinde dir. Bu işlem önerilen yöntemin başında yalnızca bir defa yapılan ve hassas frekans kestiriminin hesaplama maliyeti üzerinde etkisi olmayan bir işlem olduğu için N değeri artması önerilen yöntemin zaman maliyetinde büyük bir etki yaratmamaktadır.

$$r[n] = \sum_{l=1}^3 A_l e^{j \left(\frac{2\pi(8.265)}{64} ln + \phi_l \right)} + w[n], \quad n = \{0, \dots, 63\}. \quad (15)$$

Şekil 1'de KKOH'nin farklı SİGO değerlerine göre değışimi gösterilmiştir. Sekilde 10 dB civarı olarak gözükten eşik SİGO değeri aşıldıktan sonra önerilen yöntemin ACRAS'a ulaştığı, kuramsal hesaplamadan beklendiği gibi, görülmektedir.

Önerilen metodun birleşme öncesi (harmonikler kullanılmadan yapılan frekans kestirimi) ve birleşme sonrası arasındaki başarımlarından harmonik bileşenlerdeki gücünün temel frekans kestiriminde kullanılması performansı artırmaktadır. Ayrıca temel frekansın AFD spektrumunda yarattığı tepe noktasına bakarak kaba kestirim yapılması durumundaki sonuç da Şekil 1'de verilmektedir. (6)'daki ifadenin kaba frekans kestiriminde kullanılması düşük SİGO bölgesinde bir miktar performans artırımı sağlamaktadır.

YDOEKK yöntemi ızgara üzerinde aramaya dayandığı için yüksek SİGO değerlerinde ızgara aralıklarının çok küçük seçilmesi gerekmektedir. Örneğin Şekil 1'de 10 dB SİGO değerinde ACRAS sınırı 10^{-2} olduğundan, eğer ızgara aralığı 10^{-2} 'den daha küçük örneğin $10^{-2}/5$ seçilirse, bu seçim



Şekil 1: Başarım seviyesi karşılaştırması

$[0, 2\pi]$ aralığında yaklaşık olarak 3200 noktalı bir ızgara yaratılmasına denk gelmektedir. ızgara üzerinde arama yapmak özellikle yüksek SİGO'da verimli olmamakta, nümerik arama yöntemlerine geçilmesi (Gauss-Newton yöntemi gibi) işlem yoğunluğu bakımından gerekli olabilmektedir. Öte yandan önerilen yöntem SİGO'dan etkilenmeyen bir yineleme sayısında sonlanmaktadır. Önerilen yöntemin MATLAB gerçeklemesi, bir adet gözlem için, SİGO'dan bağımsız olarak ortalama olarak 0.01 saniyede sonlanmakta, YDOEKK yöntemi ise SİGO = 10 dB iken ortalama 1.2 saniyede, SİGO = 30 dB iken 5.26 saniyede sonlanmaktadır. Yüksek SİGO değerleri için süre daha da artmaktadır. Önerilen yöntem hesaplama karmaşıklığı açısından avantajlı olup başarımlar olarak YDOEKK'den neredeyse farksızdır.

V. SONUÇ

Bu bildiri, temel frekans kestirim problemi için hesaplama açısından etkili bir yöntem sunulmaktadır. Yöntem ile yinelemeli kestirim ve çıkarma stratejisi (YSA yaklaşımı, [7]) uygulanarak harmonik frekanslar teker teker kestirilmekte ve kestirimler yansız bir füzyon işlemiyle birleştirilmektedir. Önerilen yöntemin birçok uygulamada ızgara arama tabanlı yöntemlere alternatif olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] M. Christensen and A. Jakobsson, *Multi-Pitch Estimation*. Morgan & Claypool, 2009.
- [2] M. G. Christensen, S. H. Jensen, S. V. Andersen, and A. Jakobsson, "Subspace-based fundamental frequency estimation," in *2004 12th European Signal Processing Conference*, Sep. 2004, pp. 637–640.
- [3] R. Badeau, B. David, and G. Richard, "A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 2, pp. 450–458, Feb 2006.
- [4] J. Papy, L. De Lathauwer, and S. Van Huffel, "A shift invariance-based order-selection technique for exponential data modelling," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 7, pp. 473–476, July 2007.
- [5] C. Candan, "Analysis and further improvement of fine resolution frequency estimation method from three dft samples," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 9, pp. 913–916, Sep. 2013.
- [6] E. Aboutanios and B. Mulgrew, "Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 4, pp. 1237–1242, April 2005.
- [7] S. Ye, J. Sun, and E. Aboutanios, "On the estimation of the parameters of a real sinusoid in noise," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 24, no. 5, pp. 638–642, May 2017.
- [8] S. Ye and E. Aboutanios, "An algorithm for the parameter estimation of multiple superimposed exponentials in noise," in *2015 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, April 2015, pp. 3457–3461.
- [9] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume 1: Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.